

СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

*Т. Ю. Джанелидзе
и Я. Т. Пановко*

СТАТИКА
УПРУГИХ
ТОНКОСТЕННЫХ
СТЕРЖНЕЙ

ОГИЗ
ГОСТЕЖИЗДАТ

1 9 4 8

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

проф. А. И. ЛУРЬЕ

и проф. Л. Г. ЛОЙЦАНСКОГО

О Г И З

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА

Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ и Я. Г. ПАНОВКО

**С Т А Т И К А
УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ
СТЕРЖНЕЙ**

**О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА**

Редактор *А. И. Чекумарев*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 17-XI 1948 г. Печ. л. 13. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 3000 экз.
Тип. зи. в печ. л. 35231. М-19529. Цена 7 руб. Заказ № 3971.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Основные уравнения статки упругих тонко- стенных стержней	11
§ 1. Введение	—
§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия призма- тического тонкостенного стержня	12
§ 3. Интегральные уравнения равновесия призматиче- ского тонкостенного стержня	20
§ 4. Статическая неопределимость задачи	25
§ 5. Деформационные гипотезы статки тонкостенных стержней	26
§ 6. Полная система уравнений статки упругих тонко- стенных стержней	32
Глава II. Прикладная теория равновесия упругих тонко- стенных стержней с открытым профилем . .	43
§ 1. Основные уравнения	—
§ 2. Секториальные характеристики	55
§ 3. Решение уравнений стесненного кручения	67
§ 4. Действие бипары. Бимоменты	78
§ 5. Неразрезные стержни	83
§ 6. Кручение вокруг конструктивно заданных осей . .	90
§ 7. О затухании эффекта стеснения. Приложимость принципа Сен-Венана	95
§ 8. Вариационный вывод основных уравнений	101
Глава III. Прикладная теория равновесия упругих тонко- стенных стержней с закрытым профилем . . .	108
§ 1. Основные уравнения	—
§ 2. Вариационное уравнение задачи	115
§ 3. Приближенное уравнение задачи	11
§ 4. Секториальные характеристики	12
§ 5. Решение дифференциального уравнения кручения	131
§ 6. О затухании эффекта стеснения	13

Глава IV. Упрощенные теории равновесия упругих тонкостенных стержней	136
§ 1. Возможности применения гипотезы о линейном характере распределения нормальных напряжений	—
§ 2. Способы, основанные на замене тонкостенного стержня системой тонких поясов, работающих на продольные усилия и связанных обшивкой, работающей на сдвиг. Статически определяемые задачи	145
§ 3. Способы, основанные на замене стержня системой тонких поясов, работающих на продольные усилия и связанных обшивкой, работающей на сдвиг. Статически неопределимые задачи	150
Глава V. Общая теория равновесия упругих тонкостенных стержней	154
§ 1. Основные уравнения	—
§ 2. Геометрические характеристики поперечного сечения	163
§ 3. Определение касательных напряжений в сечениях стержня, остающихся плоскими при его деформации	168
§ 4. Задачи, сводящиеся к решению задачи Сен-Венана для тонкостенного стержня	173
§ 5. О решении задачи в случае произвольных граничных условий	178
§ 6. Решение задачи о стесненном кручении тонкостенных стержней с закрытым профилем, обладающих двумя осями симметрии	179
§ 7. Основы решения общей задачи	194
Заключение	202
Литература	207

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди недавно возникших проблем прикладной теории упругости видное место принадлежит задаче упругого равновесия тонкостенных стержней, т. е. стержней, имеющих вид достаточно длинных цилиндрических оболочек. Вначале эта задача возникла в связи с нуждами строительной техники; впоследствии она оказалась предметом пристального внимания авиационных инженеров.

К настоящему времени собран большой и в высшей степени интересный теоретический и экспериментальный материал, свидетельствующий о серьезных успехах развития проблемы расчета тонкостенных стержней. Эти успехи в своей решающей части обязаны работам советских ученых—В. З. Власова, А. А. Уманского, Р. А. Ададунова и др. Отличительной чертой творчества отечественных исследователей является стремление к изысканию общих методов решения, годных для случаев произвольного нагружения и граничных условий при любой форме поперечного сечения.

В настоящей монографии излагается лишь современное состояние статики тонкостенных стержней; вопросы устойчивости и колебаний представляют самостоятельную тему и нами не затрагиваются.

Расчет тонкостенных стержней с помощью теории сопротивления материалов на основе постулата о плоском распределении нормальных напряжений в поперечных сечениях оказывается, как правило, исключенным. Для тонкостенных

стержней с открытым профилем эта гипотеза может привести к статически неудовлетворительным результатам, когда стержень приобретает свойства внутренней изменяемости; для задач о стержнях с закрытым профилем та же гипотеза во многих случаях влечет за собой грубое нарушение условий совместности деформаций. Сказанное вынуждает в большинстве случаев отказываться от примитивной постановки задачи в духе сопротивления материалов и изыскивать более точное решение.

Развитие теории тонкостенных стержней на основе современной теории оболочек оказывается практически возможным лишь после введения некоторых дополнительных гипотез кинематического характера; в противном случае задача оказывается настолько сложной, что может быть решена до конца лишь в простейших случаях нагружения и граничных условий.

В настоящее время развитие теории упругости идет в двух направлениях. С одной стороны, продолжают поиски точных или приближенных решений основных уравнений теории упругости. С другой — интенсивно разрабатываются и такие разделы теории упругости, при построении которых исходят не из полной системы уравнений, а используют некоторые гипотезы о характере перемещений; таковы теории тонких стержней, плит и оболочек. Между этими двумя направлениями существует тесная связь и недавно удалось, исходя из уравнений теории упругости, приближенно решить некоторые задачи теории плит и оболочек, что позволило изучить точность основных гипотез этих теорий.

Современная теория тонкостенных стержней относится ко второму направлению развития теории упругости, ибо в ее основе лежат некоторые наперед принимаемые деформационные гипотезы.

Важнейшей заслугой советской школы теории тонкостенных стержней является формулировка таких дополнительных гипотез, которые обеспечивают радикальное упрощение расчетной методики при минимальном ущербе точности результатов.

Мы рассматриваем, прежде всего, основные уравнения статики тонкостенных стержней в наиболее общей постановке (глава I).

Далее излагаются прикладные теории В. З. Власова (для стержней с открытым профилем) и А. А. Уманского (для стержней с закрытым профилем), снискавшие заслуженную популярность в инженерных кругах (главы II и III).

В главе IV рассматриваются различные упрощенные теории, основанные на дополнительных, сверх принятых В. З. Власовым и А. А. Уманским допущениях. Не будучи универсальными, эти теории в некоторых случаях могут оказаться достаточно эффективными.

Важное принципиальное значение имеет содержание пятой главы; в ней излагаются элементы разработанной Р. А. Ададуровым общей теории тонкостенных стержней с неизменяемым контуром.

Главной задачей этой теории является контроль точности результатов, даваемых прикладными теориями, и решение таких задач, в которых прикладные теории принципиально недостаточны.

В заключении дается краткий обзор основных этапов развития теории тонкостенных стержней.

Рассматривая современное состояние теории тонкостенных стержней, мы стремились дать методически цельное изложение, позволяющее анализировать содержание различных методов с единой точки зрения; в некоторых местах приведены результаты собственных исследований авторов.

Много ценных советов и замечаний получено нами из бесед с профессорами А. И. Лурье и А. А. Уманским. Ряд существенных указаний сделан Р. А. Ададуриным и редактором книги А. И. Чекмаревым. Всем перечисленным лицам авторы приносят глубокую благодарность.

Г. Джанелидзе, Я. Пановко

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

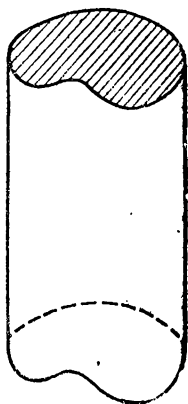
§ 1. Введение

В теории упругости и строительной механике тела, максимальный поперечный размер которых мал по сравнению с длиной, называются стержнями. В зависимости от соотношения трех характерных размеров различают два типа стержней.

Первый тип образуют стержни, у которых оба размера поперечного сечения являются величинами одного порядка (фиг. 1). Ко второму типу относятся стержни, у которых три основных размера представляют собой величины разных порядков; у этих стержней размеры поперечного сечения в одном направлении малы по сравнению с размерами в другом (фиг. 2). Такие стержни называются тонкостенными.

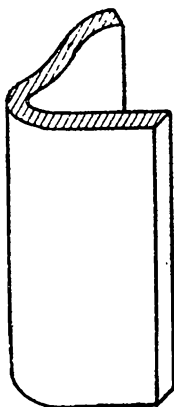
В зависимости от характера боковой поверхности различают стержни: призматические, конические, естественно скрученные и др.

Приведенная геометрическая классификация стержней, дающая по существу лишь качественное представление о различных типах, с точки зрения теории упругости недостаточна и должна быть дополнена сведениями о величине перемещений, испытываемых отдельными точками стержня при деформации. Нужно различать „малые“ и „большие“ упругие перемещения точек стержня.



Фиг. 1.

Дело в том, что в телах, имеющих малые размеры в одном или двух измерениях, взаимное перемещение отдельных точек может быть того же порядка, что и порядок этих малых размеров. Это исключает возможность использования уравнений линейной теории упругости и поясняет, почему геометрическая классификация еще не определяет характера задачи; два геометрически одинаковых стержня при тех же самых нагрузках могут иметь существенно различные перемещения в зависимости от упругих свойств материалов.



Фиг. 2.

Классические задачи о равновесии упругих стержней, изучаемые в курсах теории упругости (Сен-Венана, Клебша, Стеклова, Альманзи и др.), касаются призматических стержней первого типа, отдельные точки которых получают в процессе деформации малые перемещения.

Теория тонких стержней изучает в случае стержней первого типа большие упругие перемещения; разумеется, что она может быть использована в линейном приближении для расчета этих стержней при малых перемещениях.

В существующих теориях тонкостенных стержней речь идет о расчете стержней второго типа в случае малых перемещений.

Вопрос о расчете подобных стержней при больших упругих перемещениях не разработан, выходит за рамки настоящей книги и относится к области нелинейной теории оболочек.

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия призматического тонкостенного стержня

Из определения тонкостенного призматического стержня следует, что его можно рассматривать как часть тонкой цилиндрической оболочки, вырезанную вдоль образующих (для стержней с открытым профилем), или как длинную замкнутую цилиндрическую оболочку (для стержней с закрытым профилем).

Геометрическое место точек, равноудаленных от граничных поверхностей, называется срединной поверхностью. Опре-

делим положение точки на срединной поверхности координатами z и s , отсчитываемыми по образующим срединной поверхности и по ортогональным к ним кривым. Начало отсчета координаты z поместим в одно из крайних сечений оболочки, а начало отсчета s , одинаковое для всех сечений, пока фиксировать не будем.

Выделим из оболочки четырьмя сечениями, перпендикулярными к срединной поверхности z , $z + dz$, s , $s + ds$, элемент объема (фиг. 3) и составим условия его равновесия.

Все внешние и внутренние силы мы приведем к срединной поверхности оболочки, т. е., иными словами, действительное распределение внешних и внутренних сил мы заменим статически эквивалентным распределением по срединной поверхности. После этого вместо условий равновесия элемента оболочки можно рассматривать равновесие элемента срединной поверхности.

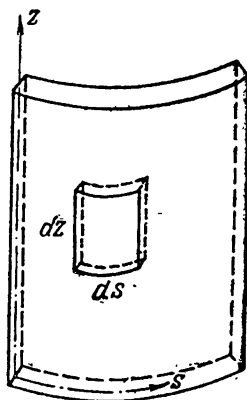
Обозначим составляющие внутренних сил и моментов, отнесенных к единице длины линии срединной поверхности, через T_z , T_s , S_z , S_s , N_z , N_s , G_z , G_s , H_z и H_s (фиг. 4 и 6). Здесь T обозначает нормальную силу, S — касательную силу, N — перерезывающую силу, G — изгибающий момент, H — крутящий момент. Индексы, приписанные к буквам T , S , N , G и H , указывают нормаль к линии, в точках которой рассматриваются эти усилия и моменты. Составляющие внешних сил, отнесенные к единице площади срединной поверхности, будем обозначать через p_z , p_s , p_n .

Проектируя все силы на направление образующей, имеем:

$$\left(T_z + \frac{\partial T_z}{\partial z} dz\right) ds - T_z ds + \left(S_s + \frac{\partial S_s}{\partial s} ds\right) dz - S_s dz + p_z dz ds = 0$$

или по сокращении на $dz ds$:

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{\partial S_s}{\partial s} + p_z = 0. \quad (1)$$

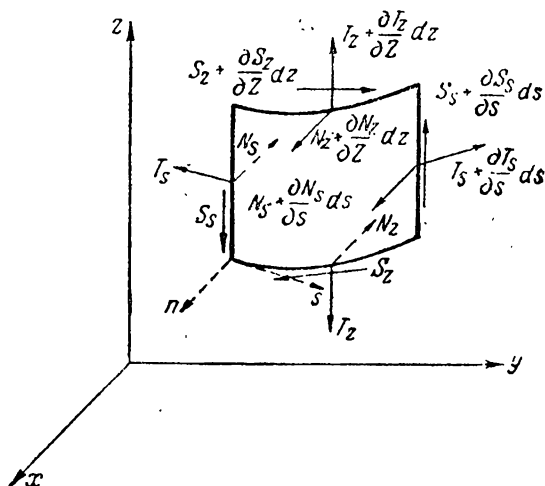


Фиг. 3.

Условие равновесия в проекции на направление касательной дает:

$$\left(T_s + \frac{\partial T_s}{\partial s} ds\right) dz - T_s dz + \left(S_z + \frac{\partial S_z}{\partial z} dz\right) ds - S_z ds + N_s d\beta dz + p_s dz ds = 0. \quad (2)$$

Происхождение члена $N_s d\beta dz$ в этом выражении не трудно понять, если обратиться к фиг. 5, где изображено сечение рассматриваемого элемента плоскостью $z = \text{const.}$



Фиг. 4.

Угол $d\beta$ между нормальными к срединной поверхности в двух ее точках, расположенных на линии $z = \text{const}$ на расстоянии ds друг от друга, связан с радиусом кривизны этой линии $R(s)$ известным соотношением:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\beta}{ds}. \quad (3)$$

Используя (3), перепишем (2) в виде:

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{N_s}{R} + p_s = 0. \quad (4)$$

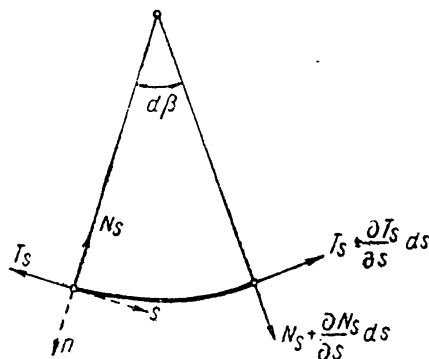
Для получения третьего условия равновесия спроектируем все силы, действующие на элемент, на направление внешней нормали к кривой $z = \text{const}$ (фиг. 5):

$$\left(N_s + \frac{\partial N_s}{\partial s} ds\right) dz - N_s dz + \left(N_z + \frac{\partial N_z}{\partial z} dz\right) ds - N_z ds - \\ - T_n d\beta dz + p_n ds dz = 0$$

или:

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_z}{\partial z} - \frac{T_n}{R} + p_n = 0. \quad (5)$$

Равенство нулю главного момента всех сил, действующих на рассматриваемый элемент срединной поверхности после



Фиг. 5.

проектирования на направления $z = \text{const}$, $s = \text{const}$ и на направление внешней нормали n к линии $z = \text{const}$, также дает три уравнения (на фиг. 6 показаны лишь векторы моментов G_z , G_s , H_z , H_s):

$$\left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial z} dz\right) ds - H_z ds + \left(G_s + \frac{\partial G_s}{\partial s} ds\right) dz - \\ - G_s dz - N_s dz ds = 0,$$

$$\left(H_s + \frac{\partial H_s}{\partial s} ds\right) dz - H_s dz + \left(G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} dz\right) ds - \\ - G_z ds + N_z dz ds = 0,$$

$$- S_z ds dz + S_s ds dz - H_s d\beta dz = 0,$$

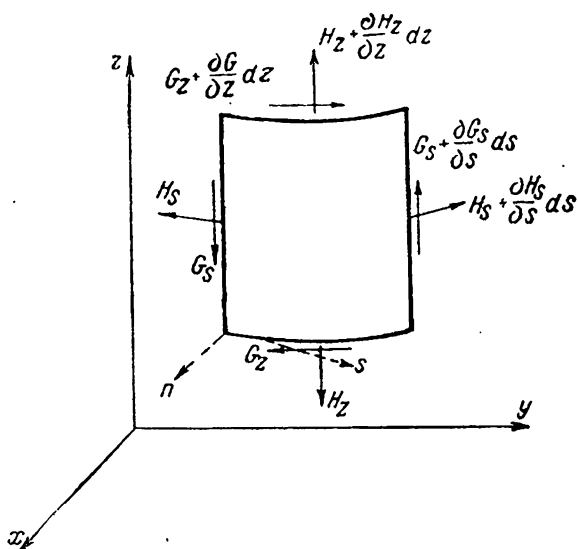
которые после простых преобразований принимают вид:

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\partial G_s}{\partial s} - N_s = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial s} + \frac{\partial G_z}{\partial z} + N_z = 0, \quad (7)$$

$$S_z - S_s + \frac{H_s}{R} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, система шести уравнений статики (1), (4)–(8) содержит десять неизвестных сил и моментов. Пре-



Фиг. 6

вышение числа неизвестных над числом уравнений равновесия является математическим выражением статической неопределимости оболочки.

Порядок статической неопределимости несколько понижается, если сделать дополнительные предположения о характере распределения напряжений по толщине оболочки.

Во всех теориях тонкостенных стержней с закрытым профилем сечения принимается, что напряженное состояние в се-

чениях $z = \text{const}$ характеризуется нормальным напряжением σ_z и касательным напряжением τ_{zs} , которые считаются постоянными по толщине оболочки; при этом суммарные усилия в точке z, s будут:

$$T_z = h(s) \cdot \sigma_z(z, s); \quad S_z = h(s) \cdot \tau_{zs}(z, s). \quad (9)$$

Здесь $h(s)$ обозначает толщину оболочки в рассматриваемом месте.

Из этого предположения следует, что $N_z = 0$, ибо считается, что напряженное состояние в сечении $z = \text{const}$ описывается только усилиями T_z и S_z . Простое вычисление показывает, что в силу того же предположения моменты G_z и H_z также обращаются в нуль:

$$G_z = \sigma_z \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} n \, dn = 0, \quad (10)$$

$$H_z = \tau_{zs} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} n \, dn = 0, \quad (11)$$

так как ни σ_z , ни τ_{zs} не зависят от координаты n , отсчитываемой вдоль нормали к срединной поверхности.

Для стержней с открытым профилем высказанное предположение оказывается недостаточным. Чтобы в этом убедиться, вспомним некоторые свойства решения задачи Сен-Венана о кручении тонкостенного призматического стержня парами сил, приложенными на его торцах, которая является простейшей из рассматриваемых ниже задач.

Известно, что при свободном кручении подобных стержней касательные напряжения в сечениях $z = \text{const}$ существенным образом переменны по толщине сечения (по координате n). Момент этих касательных напряжений составляет часть общего крутящего момента \bar{M}_z ; другая часть крутящего момента образуется системой относительно малых усилий N_s .

Поэтому, если результат (11) можно полагать приемлемым в случае стержней с закрытым профилем, то он недо-

пригоден для стержней с открытым профилем, где надлежит принимать $N_z \neq 0$ и, кроме того, учитывать суммарный крутящий момент усилий N_z . Это заставляет искать путь для учета обоих обстоятельств. Наиболее простой способ (кстати сказать, единственный предложенный в литературе) состоит в отказе от применения формулы (11) и в дополнении гипотез (9) выражением, связывающим суммарный крутящий момент \bar{M}_z , проистекающий от указанных причин, с углом закручивания на единицу длины ϑ . Эту формулу принимают в виде, соответствующем задаче Сен-Венана: $\bar{M}_z = C\vartheta$, здесь C — жесткость при свободном кручении; ϑ — угол закручивания на единицу длины.

В случае тонкостенных стержней C вычисляют по приближенной формуле

$$C = \frac{\mu}{3} \int_{s_1}^{s_2} h^3(s) ds,$$

где s_1 и s_2 — значения s , соответствующие крайним образующим.

Малость усилий N_z при значительности их момента позволяет считать $N_z = 0$, а их момент формально относить к интегралу от H_z , т. е. принимать:

$$\bar{M}_z = C\vartheta = \int_{s_1}^{s_2} H_z ds. \quad (12)$$

Обычно предполагается, что такая формальная замена не может существенным образом изменить распределение нормальных и касательных напряжений по срединной поверхности.

В итоге на основании сделанных предположений имеем:

Стержень с открытым профилем	Стержень с закрытым профилем
$N_z = 0$	$N_z = 0$
$G_z = 0$	$G_z = 0$
$\bar{M}_z = C\vartheta$	$H_z = 0$

Подставляя значения N_z и G_z в уравнение статики (7), имеем:

$$\frac{\partial H_s}{\partial s} = 0,$$

т. е. при сделанных нами предположениях H_s является функцией только координаты z . Обычно полагают, что

$$H_s = 0.$$

В случае стержня с открытым профилем это есть прямое следствие равенства H_s нулю на краях оболочки $s = s_1$, $s = s_2$; для стержня с закрытым профилем, принимая $H_s = 0$, мы делаем дополнительное предположение, эквивалентное естественной гипотезе, о том что τ_{zs} не зависит от координаты n , — так же как и τ_{zs} .

При $H_s = 0$ последнее уравнение статики (8) принимает вид закона парности касательных усилий:

$$S_z = S_s.$$

Это позволяет в дальнейшем при S индекс не писать.

Перепишем теперь уравнения равновесия рассматриваемого стержня-оболочки в окончательном виде:

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial s} + p_s = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{N_s}{R} + p_s = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} - \frac{T_s}{R} + p_n = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial z} + \frac{\partial G_s}{\partial s} - N_s = 0. \quad (16)$$

В эту систему четырех уравнений входят в случае стержня открытого профиля шесть неизвестных (T_z , T_s , S , N_s , G_s , H_s), а в случае стержня закрытого профиля — пять (T_z , T_s , S , N_s , G_s).

Из этого сопоставления можно видеть снижение порядка статической неопределимости задачи; однако и в такой упрощенной постановке уравнений статики недостаточно для отыскания всех неизвестных функций, так что последующее обращение к условиям совместности деформаций или к деформационным гипотезам неизбежно.

§ 3. Интегральные уравнения равновесия призматического тонкостенного стержня

При построении теории тонкостенных стержней оказывается целесообразным наряду с дифференциальными уравнениями равновесия (13) — (16) рассматривать и интегральные уравнения равновесия. Если записать уравнения равновесия элемента срединной поверхности в проекциях на оси декартовой системы координат x, y, z , а затем выполнить интегрирование полученных четырех уравнений по всей дуге s , то получится:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} T_z ds + q_z = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} S \frac{dx}{ds} ds + q_x = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} S \frac{dy}{ds} ds + q_y = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{M}_z + \int_{s_1}^{s_2} S r ds \right) + m_z = 0. \quad (20)$$

Здесь обозначено:

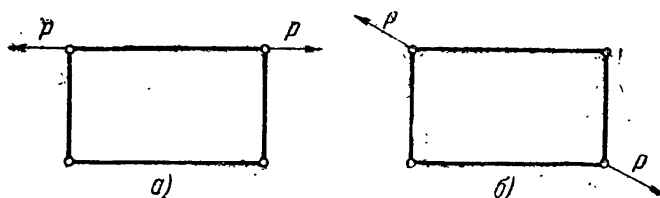
s_1 и s_2 — координаты s , соответствующие краевым образующим;

$$q_x, q_y, q_z, m_z = \int_{s_1}^{s_2} (x p_y - y p_x) ds$$

внешние нагрузки, приходящиеся на единицу длины стержня; $r = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в точке s к кривой, образованной пересечением срединной поверхности с плоскостью $z = \text{const}$.

Уравнения (17) — (20), конечно, могут быть получены и независимо от уравнений (13) — (16) из непосредственного рассмотрения равновесия элементарного отсека стержня длиной dz .

Принципиально важным является факт лишь односторонней эквивалентности системы (13)—(16) и системы (17)—(20). Действительно, если уравнения (13)—(16) удовлетворены, то уравнения (17)—(20) также обязательно удовлетворяются, ибо равновесие всех бесконечно малых элементов стержня обозначает одновременно и равновесие всего элементарного отсека стержня. Однако обратное может оказаться неверным: при удовлетворении уравнений (17)—(20) уравнения (13)—(16) могут остаться неудовлетворенными, так как из (17)—(20) нельзя обратно получить (13)—(16).



Фиг. 7.

Это означает понятный физический факт, что приложение к какой-либо системе уравновешенной совокупности внешних сил не может служить достаточным свидетельством равновесия, — если система обладает внутренней изменяемостью, то равновесие возможно лишь при определенных типах самоуравновешенной нагрузки. Для иллюстрации этого факта обратимся к изменяемой шарнирно-стержневой системе, показанной на фиг. 7; в обоих случаях внешние нагрузки удовлетворяют условиям самоуравновешенности, но равновесие системы в первом случае обеспечено, а во втором случае нарушено.

На этом примере видно, насколько недостаточными могут оказаться интегральные условия равновесия (т. е. условия, относящиеся к равновесию сил, приложенных к системе извне).

Во всех теориях тонкостенных стержней принимается, что совокупность перемещений точек срединной поверхности в плоскости поперечного сечения описывается уравнениями, относящимися к плоскому движению твердого тела. Более подробно об этой гипотезе неизменяемости контура попереч-

ного сечения* мы скажем в § 5. Здесь же для нас существенно, что предположение о недеформируемости контура поперечного сечения в плоскости последнего обозначает взаимную эквивалентность трех последних уравнений равновесия элемента (14)—(16) трем последним интегральным уравнениям равновесия (18)—(20). Действительно, если уравнения (18)—(20) удовлетворены, то тем самым обеспечены условия равновесия (14)—(16) любого элемента срединной поверхности, так как совокупность последних образует в плоскости сечения жесткое целое.

Утверждать же взаимную эквивалентность уравнений (13) и (17) мы попрежнему не можем и должны признать, что уравнение (13) описывает равновесие более полно, чем уравнение (17). Если проинтегрировать (17)—(20) от $z=0$ до $z=\text{const}$, то получится:

$$\int_{s_1}^{s_2} T_z ds = Q_z(z); \quad (21)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} S \frac{dx}{ds} ds = Q_x(z); \quad (22)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} S \frac{dy}{ds} ds = Q_y(z); \quad (23)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} S r ds + \bar{M}_z = M_z. \quad (24)$$

Эти четыре уравнения выражают условия равновесия части стержня, расположенной между сечениями $z=0$ и $z=\text{const}$; они также могут быть получены из непосредственного рассмотрения равновесия этой части стержня без интегрирования уравнений (17)—(20).

По поводу этой системы мы можем повторить сказанное

* Подчеркнем, что неизменяемость понимается лишь в определенном и узком смысле недеформируемости в плоскости поперечного сечения; перемещения точек срединной поверхности из плоскости $z=\text{const}$ могут сопровождаться деформацией этого контура.

применительно к системе (17) — (20): три последних интегральных уравнения (22) — (24) оказываются вполне эквивалентными трем дифференциальным уравнениям (14) — (16), если принимается допущение о неизменяемости контура поперечного сечения, а первое интегральное уравнение (21) описывает равновесие менее полно, чем уравнение (13).

В силу сказанного приходится пользоваться смешанной системой уравнений, состоящей из одного дифференциального уравнения (13) и трех интегральных уравнений (22) — (24).

Заметим, что уравнение (16) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z h) + \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{zs} h) + p_z = 0. \quad (25)$$

Иногда представляет некоторые удобства замена смешанной системы четырех уравнений (22) — (25) системой пяти интегральных уравнений, из которых четыре были даны выше, а пятое мы сейчас получим.

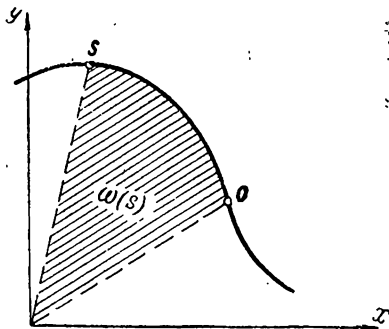
Введем функцию $\omega'(s)$, связанную с $r(s)$ соотношением:

$$\begin{aligned} \omega'(s) &= r(s); \\ \omega(s) &= \int_0^s r(s) ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Геометрический смысл ω можно усмотреть из фиг. 8. Легко видеть, что ω есть удвоенная площадь, заключенная между дугой $0 \dots s$ и радиусами-векторами, проведенными из начала координат в концевые точки этой дуги. Величину $\omega(s)$ мы будем называть *секториальной площадью*.

Записав теперь (24) в форме:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{zs} h \omega' ds + \bar{M}_z = M_z,$$



Фиг. 8.

преобразуем интеграл с помощью формулы для интегрирования по частям. Тогда:

$$\tau(z, s_2) \omega(s_2) - \tau(z, s_1) \omega(s_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial(\tau h)}{\partial s} \omega ds = M_z - \bar{M}_z.$$

Для стержней с открытым профилем, при отсутствии нагрузки на свободных краях:

$$\tau(z, s_2) = \tau(z, s_1) = 0,$$

поэтому

$$- \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial(\tau h)}{\partial s} \omega ds = M_z - \bar{M}_z.$$

Исключая из этого соотношения $\frac{\partial(\tau h)}{\partial s}$ с помощью уравнения (25), имеем:

$$\int_{s_1}^{s_2} h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \omega ds + \int_{s_1}^{s_2} p_z(z, s) \omega dz = M_z - \bar{M}_z,$$

или после интегрирования по z от $z=0$ до $z=\text{const}$:

$$\begin{aligned} B_\omega = B_\omega(0) + \int_0^z [M_z(z) - \bar{M}_z(z)] dz - \\ - \int_0^z \int_{s_1}^{s_2} p_z \omega ds dz, \end{aligned} \quad (27)$$

где обозначено:

$$B_\omega = \int_{s_1}^{s_2} \sigma_z(z, s) \omega(s) h(s) ds. \quad (28)$$

Величину B_ω мы будем называть *бимоментом*; этот термин был введен В. З. Власовым.

Интегральное уравнение (27) вместе с интегральными уравнениями (21)–(24) дает полную систему интегральных уравнений задачи, вполне эквивалентную смешанной системе уравнений (22)–(25). Чтобы убедиться в этой эквивалент-

ности, продифференцируем (27) по z и вычтем из него (24), тогда будет:

$$\int_{s_1}^{s_2} h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \omega ds + \int_{s_1}^{s_2} p_z \omega ds - \int_{s_1}^{s_2} \tau_{zs} h r ds = 0,$$

или после преобразования последнего интеграла по формуле интегрирования по частям:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} h + \frac{\partial (\tau_{zs} h)}{\partial s} + p_z \right) \omega ds = 0. \quad (29)$$

В силу справедливости последнего равенства при произвольном z из него следует уравнение (25). Этим и подтверждается взаимная эквивалентность смешанной системы уравнений (22),— (25) пяти интегральным уравнениям равновесия.

Следует отметить, что для стержня с открытым профилем при исчезающей жесткости свободного кручения ($M_s = 0$) интегральное уравнение (27) оказывается условием, относящимся к внешней нагрузке, приложенной к любой части стержня, — и в частности к нагрузке, приложенной ко всему стержню в целом; самоуравновешенная нагрузка, отвечающая условиям (21) — (24), может нарушить равновесие стержня, если не удовлетворено уравнение (27). Возвращаясь к примеру фиг. 6, мы можем сказать, что формула (27) соответствует условию, приводящему нагрузку к виду, показанному на фиг. 7, а. Внешняя нагрузка, не отвечающая условию (27), аналогична нагрузке, изображенной на фиг. 7, б.

§ 4. Статическая неопределимость задачи

Выше мы отмечали, что число независимых уравнений статики меньше числа неизвестных задачи. Эта статическая неопределимость, свойственная всем задачам теории оболочек, не позволяет найти внутренние усилия, пользуясь только уравнениями статики.

Нужно отметить, что даже предельное упрощение картины напряженного состояния элемента не способно довести задачу до статической определенности. Действительно, безмоментная

теория оболочек, основанная на пренебрежении всеми усилиями, кроме T_z , T_θ и S , приводит к системе трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями; совпадение числа неизвестных функций с числом уравнений статики все же не обозначает обязательной статической определенности безмоментной оболочки, ибо после интегрирования этих уравнений необходимо использовать краевые условия, которые далеко не во всех случаях относятся к усилиям. Задание краевых условий в перемещениях делает задачу упругого равновесия безмоментной оболочки статически неопределимой.

Тем более очевидной оказывается статическая неопределимость в нашем случае. Для определения всех внутренних усилий к уравнениям статики необходимо присовокупить условия совместности деформаций. Однако формулировка этих условий в наиболее общей форме приводит для случая произвольного очертания поперечного сечения к практически непреодолимым трудностям.

Для построения достаточно общей теории тонкостенных стержней, годной для любых форм поперечного сечения, приходится отказаться от указанной строгой постановки задачи и введением специальных гипотез, относящихся к перемещениям, сделать получение конечных результатов практически осуществимым. Изложению принятых в теории тонкостенных стержней кинематических гипотез, являющихся вынужденным средством завершения теории, посвящается следующий параграф.

§ 5. Деформационные гипотезы статики тонкостенных стержней

В основе приближенных теорий, рассматриваемых теорией упругости, лежит представление о возможности разделения всех напряжений и деформаций на основные и второстепенные.

Так например, в теории пластин принимается, как известно, что линейный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остается нормальным к этой поверхности и после деформации. Такая деформационная гипотеза соответствует предположению об отсутствии сдвигов γ_{xz} и γ_{yz} (оси x и y лежат в срединной плоскости пластины до деформации, ось z перпендикулярна к срединной плоскости). Однако касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в теории пластин вычисляются

в виде отличных от нуля величин из условий равновесия. Точно так же в элементарной теории сопротивления материалов, основанной на гипотезе плоских сечений, сдвиги считаются отсутствующими, и касательные напряжения находятся из уравнений равновесия.

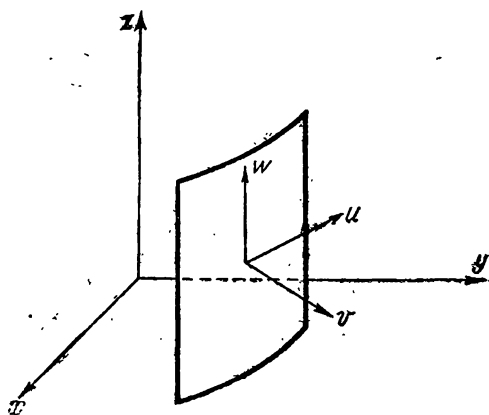
В этих примерах деформация сдвига признается второстепенной, а соответствующие касательные напряжения — также второстепенные — выясняются из уравнений статики. Такого рода разделение напряжений и деформаций на основные и второстепенные типично для всех приближенных теорий. В этих теориях добиваются лишь соответствия основных напряжений с основными деформациями, *допуская противоречие между второстепенными напряжениями и второстепенными деформациями*. Такого рода противоречия, в сущности неизбежные в приближенных теориях, являются результатом произвольности исходных деформационных гипотез; если по напряжениям, вычисленным таким способом, определить с помощью закона Гука соответствующие деформации, то условия совместности, разумеется, будут нарушены.

При развитии теории по подобной схеме прежде всего надлежит разрешить вопрос о том, какие напряжения и деформации нужно считать основными и какие — второстепенными. Решение этого вопроса может быть получено не только экспериментальным путем; некоторые заключения можно извлечь из сравнения изучаемой задачи с другими задачами, более простыми, но близкими по условиям загрузки и закрепления. При этом естественно принять, что *напряжения и деформации, равные нулю в более простой задаче, являются второстепенными в более сложной*.

Так например, при построении элементарной теории поперечного изгиба за соответствующую простую задачу принимается задача о чистом изгибе стержня двумя концевыми изгибающими парами. В этом последнем случае отсутствуют касательные напряжения в поперечных сечениях стержня, так же как и соответствующие этим напряжениям сдвиги. В полном согласии с намеченной выше схемой в решении задачи сопротивления материалов о поперечном изгибе балки касательные напряжения и сдвиги считаются величинами второстепенными (сравнительно с нормальными напряжениями и удлинениями продольных волокон). Отсюда и вытекает

гипотеза плоских сечений, так же как и последующий метод вычисления касательных напряжений из уравнений равновесия.

При построении теории тонкостенных стержней принимают в качестве исходной классическую задачу Сен-Венана о чистом кручении и, в соответствии с этим, из шести элементов деформации срединной поверхности стержня (относительных удлинений ϵ_z и ϵ_θ , сдвига γ_{zs} , компонентов изменения кри-



Фиг. 9.

визны κ_1 и κ_2 и кручения κ_θ) считают отличными от нуля только четыре (ϵ_θ , γ_{zs} , κ_2 , κ_θ), а два полагают равными нулю, т. е. считают второстепенными деформациями:

$$\epsilon_s = 0; \quad \kappa_1 = 0. \quad (30)$$

Равенства (30) выражают основную кинематическую гипотезу, используемую во всех теориях тонкостенных стержней, — гипотезу о второстепенности деформаций ϵ_s и κ_1 по сравнению с деформациями ϵ_θ , κ_2 , κ_θ и γ_{zs} .

Обозначим (фиг. 9):

w — перемещение по образующей оболочки;

u — перемещение по касательной к дуге срединной линии поперечного сечения;

v — перемещение по внешней нормали к срединной поверхности.

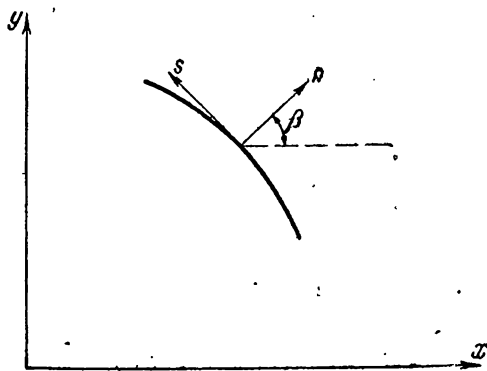
Известно, что:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{R}; \quad \chi_1 = \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} \right). \quad (31)$$

Поэтому (30) приобретает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{R} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} \right) = 0. \quad (32)$$

Для интегрирования этих уравнений удобно перейти от компонент перемещения в местной системе координат



Фиг. 10.

к компонентам в декартовой системе, которые мы обозначим ξ , η и ϖ (фиг. 10):

$$\left. \begin{aligned} u &= -\xi \sin \beta + \eta \cos \beta, \\ v &= \xi \cos \beta + \eta \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial \xi}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \eta}{\partial s} \cos \beta - \xi \cos \beta \frac{d\beta}{ds} - \eta \sin \beta \frac{d\beta}{ds}.$$

Но

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{R} \text{ и } \cos \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \sin \beta = -\frac{dx}{ds};$$

так что

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{R} = \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{dy}{ds},$$

и аналогично:

$$-\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} = -\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{dx}{ds}.$$

Поэтому систему (32), после интегрирования второго уравнения по s , можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{dy}{ds} &= 0, \\ -\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{dx}{ds} &= \theta(z), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где через $\theta(z)$ обозначена произвольная функция, появившаяся при интегрировании.

Из (34) имеем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = -\theta(z) \frac{dy}{ds}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \theta(z) \frac{dx}{ds},$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0(z) - \theta(z)y, \\ \eta &= \eta_0(z) + \theta(z)x. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Здесь ξ_0 и η_0 — пока произвольные функции z , появившиеся при интегрировании.

Таким образом, смещения ξ и η в каждом сечении определяются по формулам кинематики плоского движения и выражаются через смещения полюса ξ_0 и η_0 и угол поворота θ вокруг полюса, совпадающего с началом координат.

По формулам (33) и (35) можно найти u и v :

$$\left. \begin{aligned} u &= \xi_0 \frac{dx}{ds} + \eta_0 \frac{dy}{ds} - \theta \left[y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right], \\ v &= \xi_0 \frac{dy}{ds} - \eta_0 \frac{dx}{ds} - \theta \left[y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Формулы (35) часто принимают в качестве исходных при построении теории тонкостенных стержней. Они выражают

гипотезу о неизменяемости срединной линии поперечного сечения, о которой говорилось выше в § 3. Нужно иметь в виду, что неизменяемость, описываемую формулами (36), надлежит понимать лишь в смысле неизменяемости проекции срединной линии на плоскость xu ; наличие перемещения $w(z, s)$ приводит к искажению плоской формы этой линии („депланации“) поперечного сечения.

Как будет показано ниже, гипотеза о неизменяемости контура поперечного сечения позволяет до конца решить задачу о равновесии упругого тонкостенного стержня без каких-либо дополнительных кинематических гипотез. Это сделано ниже в главе V.

Сравнительная сложность такой теории делает целесообразным введение дополнительных предположений. Так, в прикладных теориях тонкостенных стержней считают второстепенной деформацией не только ϵ_s и κ_1 , но и *отличие сдвига γ_{zs} от сдвига, определяемого решением задачи Сен-Венана о чистом кручении*. Для стержней с открытым профилем это означает $\gamma_{zs} = 0$, так как сен-венаново кручение таких стержней не сопровождается сдвигами срединной поверхности. Для стержней с закрытым профилем величина γ_{zs} извлекается из решения задачи Сен-Венана о кручении такого стержня.

Это дополнительное предположение может быть изложено и в другой редакции, вполне эквивалентной только что указанной: перемещение $w(z, s)$ точек срединной линии поперечного сечения $z = \text{const}$ с точностью до множителя совпадает с перемещением, соответствующим решению задачи Сен-Венана о чистом кручении (этот множитель является функцией только координаты z). Подробности, относящиеся к таким прикладным теориям, будут рассмотрены ниже в соответствующих местах (главы II и III).

Чтобы завершить изучение кинематической стороны дела, дополним данные выше зависимости (31) известными соотношениями теории оболочек:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zs} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \kappa_z &= -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; & \kappa_s &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

С помощью соотношений (36) найдем окончательные выражения для деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \dot{\xi}_0 x' + \dot{\eta}_0 y' + \dot{\vartheta} \omega', \\ x_2 &= -\ddot{\xi}_0 y' + \ddot{\eta}_0 x' - \ddot{\vartheta} (xx' + yy'); \quad x_3 = \dot{\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \frac{d\xi_0}{dz}; \quad \dot{\eta}_0 = \frac{d\eta_0}{dz}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dz}, \\ x' &= \frac{dx}{ds}; \quad y' = \frac{dy}{ds}; \quad \omega' = \frac{d\omega}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

§ 6. Полная система уравнений статики упругих тонкостенных стержней

Рассмотрев в двух предыдущих параграфах статическую и деформационную стороны вопроса, мы можем теперь обратиться к использованию связи между напряжениями и деформациями для получения полной системы уравнений задачи. В настоящем параграфе мы остановимся на той системе, которая следует из относительно строгой постановки задачи, основанной на гипотезе неизменяемости контура поперечного сечения без каких-либо других гипотез. Результаты, полученные в этом параграфе, будут полностью использованы ниже в главе V.

Согласно закону Гука (при естественном для теории оболочек предположении $\sigma_n = 0$):

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_\theta}{m} \right), \quad (40)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_z}{m} \right), \quad (41)$$

$$\tau_{zs} = \mu \gamma_{zs}. \quad (42)$$

Здесь E — модуль нормальной упругости, μ — модуль сдвига, m — число Пуассона.

Так как, согласно кинематической гипотезе, $\varepsilon_\theta = 0$, то из (41) следует:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_z}{m}.$$

При этом из (40) получается:

$$\sigma_z = E \frac{m^2}{m^2 - 1} \varepsilon_z = \bar{E} \varepsilon_z.$$

Заметим, что обычно различие между E и \bar{E} невелико и им можно пренебречь. Например, при $m = 3$ имеем $\bar{E} = \frac{9}{8} E$. Используя теперь выражения для деформаций, свяжем напряжения с перемещениями:

$$\sigma_z = \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \frac{2m}{m-1} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (43)$$

$$\sigma_s = \frac{\bar{E}}{m} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (44)$$

$$\tau_{zs} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial s} + \ddot{\xi}_0 x' + \ddot{\eta}_0 y' + \ddot{\omega}' \right]. \quad (45)$$

Исключая из формул (43) и (45) перемещение w , можно получить условие неразрывности деформаций в напряжениях:

$$\frac{m-1}{2m} \frac{\partial \sigma_z}{\partial s} - \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial z} = -\mu [\ddot{\xi}_0 x' + \ddot{\eta}_0 y' + \ddot{\omega}'], \quad (46)$$

которое является своеобразным *аналогом уравнений Бельтрами* в теории упругости.

Для получения полной системы уравнений равновесия в перемещениях, подставим (43) и (45) в смешанную систему уравнений статики:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z h) + \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{zs} h) + p_z = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{n_1}^{n_2} S \frac{dx}{ds} ds + q_x = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{n_1}^{n_2} S \frac{dy}{ds} ds + q_y = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} S r ds + \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial z} + m_z = 0; \quad (20)$$

тогда имеем:

$$\frac{1}{k^2} h \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left[h \frac{\partial w}{\partial s} \right] + \ddot{\xi}_0 (hx')' + \ddot{\eta}_0 (hy')' + \ddot{\vartheta} (h\omega')' + \frac{p_z}{\mu} = 0 \quad (47)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} hx' ds + \ddot{\xi}_0 L_y + \ddot{\eta}_0 L_{xy} + \ddot{\vartheta} K_y + \frac{q_x}{\mu} = 0, \quad (48)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} hy' ds + \ddot{\xi}_0 L_{xy} + \ddot{\eta}_0 L_x + \ddot{\vartheta} K_x + \frac{q_y}{\mu} = 0, \quad (49)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} h\omega' ds + \ddot{\xi}_0 K_y + \ddot{\eta}_0 K_x + \ddot{\vartheta} \left(I_p + \frac{C}{\mu} \right) + \frac{m_z}{\mu} = 0, \quad (50)$$

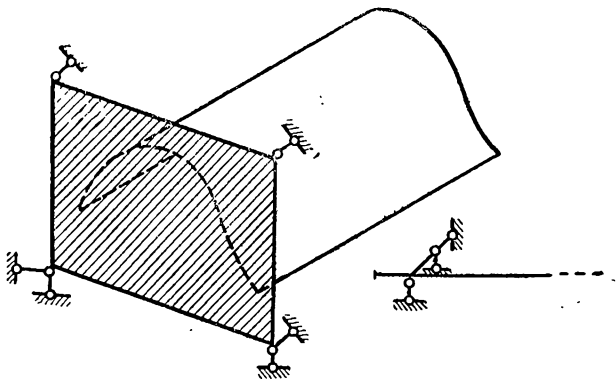
где

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \int_{s_1}^{s_2} hy'^2 ds; & L_y &= \int_{s_1}^{s_2} hx'^2 ds; \\ L_{xy} &= \int_{s_1}^{s_2} hx'y' ds; & K_x &= \int_{s_1}^{s_2} h\omega'y' ds; \\ K_y &= \int_{s_1}^{s_2} h\omega'x' ds; & I_p &= \int_{s_1}^{s_2} h\omega'^2 ds; \end{aligned} \right\} \quad (50a)$$

$$k^2 = \frac{m-1}{2m}; \quad \overline{M}_z = C \dot{\vartheta}.$$

Эта система четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций $w(z, s)$, $\xi_0(z)$, $\eta_0(z)$, $\vartheta(z)$ является *аналогом уравнений равновесия* теории упругости в перемещениях. В нее входят все вторые частные производные по z и s от функции w и первые и вторые полные производные по z от остальных трех функций. Таким образом система (47—50) является смешанной системой интегро-дифференциальных уравнений, содержащей как обыкновенные, так и частные производные. Нетрудно сообразить число и характер граничных условий, которые должны быть добавлены к этой системе для полной постановки задачи.

В отношении функций ξ_0 , η_0 и ϑ вопрос решается заданием величин этих функций или их производных в двух поперечных сечениях стержня. Перемещение w определяется интегро-дифференциальным уравнением второго порядка, получаемым исключением ξ_0 , η_0 и ϑ из системы (47 — 50). Поэтому для определения функции w необходимо иметь в каждой точке границы стержня (как на торцах, так и по краевым образующим) одно условие*.



Фиг. 11.

На торцах обычно задается или само перемещение w или его производная $\frac{\partial w}{\partial z}$, соответствующая напряжению σ_z . На краях открытого стержня всегда можно положить $\tau(z, s_1) = \tau(z, s_2) = 0$, ибо если вдоль краевых образующих приложена отличная от нуля внешняя касательная нагрузка, то ее всегда можно причислить к распределенной по оболочке нагрузке p_z ; при этом, полагая в (45) $\tau_{zs} = 0$, можно выразить граничные значения $\frac{\partial w}{\partial s}$ через первые производные $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ и $\dot{\vartheta}$. Для закрытой оболочки взамен граничного условия на продольных краях ставится требование периодичности перемещения w .

* То обстоятельство, что для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения нужно ставить именно граничную задачу, вытекает из возможности вывода этого уравнения и граничных условий к нему из вариационного принципа.

Выпишем теперь, исходя из этих соображений, торцевые условия в некоторых типичных случаях.

1. *Совершенно закрепленный торец* $z=L$ (фиг. 11). В этом случае исключены все перемещения любой точки торца, т. е.

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0(L) - \vartheta(L)y = 0, \\ \eta &= \eta_0(L) + \vartheta(L)x = 0, \\ w(L, s) &= 0,\end{aligned}$$

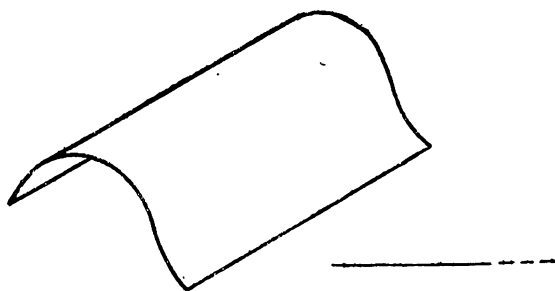
или в окончательной форме

$$\left. \begin{aligned}\xi_0(L) = \eta_0(L) = \vartheta(L) &= 0, \\ w(L, s) &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (51)$$

2. *Совершенно свободный торец* (фиг. 12). На свободном торце не приложены внешние силы, поэтому

$$\left. \begin{aligned}\sigma_z(L, s) &= \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 \\ \text{и} \quad Q_x(L) &= 0, \quad Q_y(L) = 0, \quad M_x(L) = 0.\end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Последние три условия, поставленные лишь в смысле принципа Сен-Венана, выражают равенство нулю на торце двух перерезывающих сил и крутящего момента.



Фиг. 12.

Для того чтобы получить граничные условия в перемещениях, достаточно использовать интегральные уравнения

(22), (23), (24), которые в торцевом сечении дают:

$$\left. \begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \tau_{xs}(L, s) h x' ds &= Q_x(L), \\ \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ys}(L, s) h y' ds &= Q_y(L), \\ \int_{s_1}^{s_2} \tau_{zs}(L, s) h r ds + C \dot{\vartheta}(L) &= M_z(L). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Подставляя в (53) выражение $\tau_{zs}(L, s)$ через перемещения (45) и учитывая (50а), имеем:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{z=L} h x' ds + \dot{\xi}_0 L_y + \dot{\eta}_0 L_{xy} + \dot{\vartheta} K_y = 0, \quad (54)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{z=L} h y' ds + \dot{\xi}_0 L_{xy} + \dot{\eta}_0 L_y + \dot{\vartheta} K_x = 0, \quad (55)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{z=L} h \omega' ds + \dot{\xi}_0 K_y + \dot{\eta}_0 K_x + \dot{\vartheta} \left[I_p + \frac{C}{\mu} \right] = 0. \quad (56)$$

Добавляя к этим трем условиям первое из соотношений (52):

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad (57)$$

получаем записанную через перемещения полную систему граничных условий на свободном торце.

3. *Полузакрепленный торец* (фиг. 13). Торцевое сечение не перемещается в своей плоскости, но может искажаться по оси z .

В этом случае

$$\xi_0(L) = \eta_0(L) = \vartheta(L) = 0 \quad (58)$$

и поскольку

$$\sigma_z(L, s) = 0,$$

то

$$\frac{\partial w}{\partial z}(L, s) = 0. \quad (59)$$

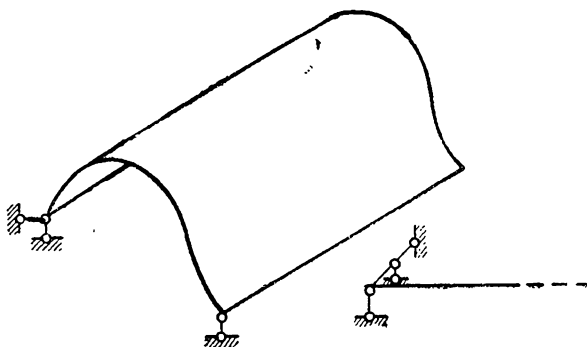
4. *Полузакрепленный торец.* Торцевое сечение снабжено диафрагмой, устраняющей только продольные перемещения (фиг. 14). В этом случае граничные условия легко получаются, если первое из соотношений (52) заменить очевидным равенством

$$w(L, s) = 0. \quad (60)$$

Тогда, учитывая, что $\frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{z=L} = 0$, из (54), (55), (56) получаем искомые граничные условия для ξ_0 , η_0 и ϑ :

$$\dot{\xi}_0(L) = \dot{\eta}_0(L) = \dot{\vartheta}(L) = 0. \quad (61)$$

Столь же просто получаются и граничные условия в более сложных случаях закрепления. При этом нужно учитывать



Фиг. 13.

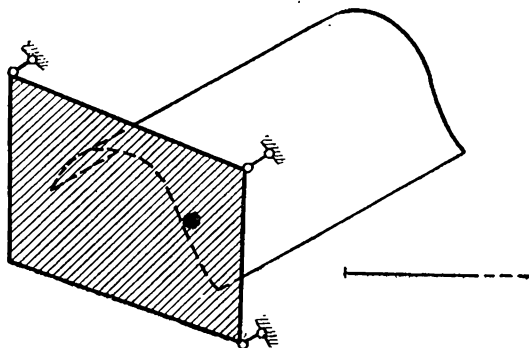
приводимое ниже соответствие между перемещениями, с одной стороны, и обобщенными силами — с другой.

Перемещения	$w(z, s)$	ξ_0	η_0	ϑ
Обобщенные силы	$\sigma_z(z, s) h ds$	$Q_x(z)$	$Q_y(z)$	$M_z(z)$

Можно показать, что надлежащим выбором координатной системы (см. главу V) нетрудно добиться того, чтобы

сила Q_x не вызывала перемещений η_0 и ϑ , а сила Q_y не вызывала перемещений ξ_0 и ϑ и, наконец, момент M_z не вызывал перемещений ξ_0 и η_0 . Тогда задание какой-либо величины верхней строки таблицы исключает возможность задания соответствующей величины нижней строки, и наоборот.

Отметим также, что при постановке граничных условий принцип Сен-Венана используется лишь для напряжения τ_{zs} ,



Фиг. 14.

а для напряжения σ_z граничные условия ставятся в любой точке торца. Постановка граничных условий для σ_z в смысле принципа Сен-Венана (т. е. в виде интегральных характеристик: растягивающей силы T_z и изгибающих моментов M_x и M_y) делает задачу неопределенной.

Детальное развитие теории, основанной на приведенной выше системе уравнений, дается в главе V.

В заключение остановимся на виде полной системы уравнений статики в перемещениях в случае прикладной теории В. З. Власова.

Предположение о второстепенном характере деформации γ_{zs} в случае стержня с открытым профилем сразу дает дифференциальное уравнение, связывающее w , ξ_0 , η_0 , ϑ [см. (45)]:

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \dot{\xi}_0 x' + \dot{\eta}_0 y' + \dot{\vartheta} \omega' = 0. \quad (62)$$

Интегрирование этого уравнения по s приводит к соотношению

$$w(z, s) = -\dot{\xi}_0 x - \dot{\eta}_0 y - \dot{\vartheta} \omega + \zeta(z),$$

где $\zeta(z)$ — произвольная функция.

Зная $w(z, s)$, вычислим $\sigma_z = \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z}$:

$$\sigma_z = \bar{E} [\dot{\zeta} - \ddot{\xi}_0 x - \ddot{\eta}_0 y - \ddot{\vartheta} \omega]. \quad (63)$$

Затем из первого уравнения смешанной системы уравнений статики найдем касательное напряжение τ_{zs} . Использование граничного условия на одном из продольных краев оболочки позволяет получить окончательное выражение для τ_{zs} через перемещения

$$\begin{aligned} \tau_{zs} h = & - \int_0^s p_z ds + \bar{E} \left[\ddot{\xi}_0 \int_0^s x h ds + \right. \\ & \left. + \ddot{\eta}_0 \int_0^s y h ds + \ddot{\vartheta} \int_0^s \omega h ds - \ddot{\zeta} \int_0^s h ds \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Подставляя (63) и (64) в четыре интегральных уравнения статики (17)–(20), получаем систему из четырех дифференциальных уравнений*:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} \left[\ddot{\zeta} \int_0^l h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^l x h ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^l y h ds - \ddot{\vartheta} \int_0^l \omega h ds \right] + \\ + q_z = 0, \\ \bar{E} \left[\ddot{\zeta} \int_0^l x h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^l x^2 h ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^l x y h ds - \right. \\ \left. - \ddot{\vartheta} \int_0^l x \omega h ds \right] + \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + q_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

* Пределы интегрирования 0, l обозначают интегрирование по всей линии сечения.

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} \left[\ddot{\zeta} \int_0^l y h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^l x y h ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^l y^2 h ds - \right. \\ \left. - \ddot{\vartheta} \int_0^l y \omega h ds \right] + \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + q_y = 0, \\ \bar{E} \left[\ddot{\zeta} \int_0^l \omega h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^l x \omega h ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^l y \omega h ds - \right. \\ \left. - \ddot{\vartheta} \int_0^l \omega^2 h ds \right] + \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + C \ddot{\vartheta} + m_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

служашую для определения четырех неизвестных перемещений. Эта система уравнений в полных производных имеет второй порядок относительно функции ζ^* и четвертый относительно функций ξ_0 , η_0 , ϑ . Поэтому ее общий интеграл содержит четырнадцать произвольных постоянных, определяемых из торцовых условий.

Не останавливаясь сейчас на составлении этих условий (см. гл. II), приведем лишь таблицу, устанавливающую соответствие между перемещениями и обобщенными силами:

Перемещения	ξ_0	η_0	ϑ	$\dot{\xi}_0$	$\dot{\eta}_0$	$\dot{\vartheta}$	w_0 перемещение полюса
Обобщенные силы	Q_x	Q_y	M_z	M_x	M_y	B_ω	Q_z

Напряжение σ_z в теории В. З. Власова характеризуется четырьмя интегральными силовыми факторами: растягивающей силой Q_z , изгибающими моментами M_x и M_y и бимоментом B_ω ; в то же время перемещение $w(z, s)$ характеризуется четырьмя функциями ξ_0 , η_0 , ϑ , ζ . Поэтому первый

* Третья производная $\ddot{\zeta}$ легко исключается из трех последних уравнений (65) с помощью первого уравнения, предварительно продифференцированного по z . Возможность такой операции позволяет считать, что система (65) имеет второй порядок относительно функции ζ .

столбец таблицы на стр. 38 здесь заменяется четырьмя последними столбцами.

Семь столбцов только что приведенной таблицы отвечают семи граничным условиям, имеющим место на каждом из торцов.

Из сопоставления исходных уравнений общей теории Р. А. Ададунова с уравнениями прикладной теории В. З. Власова (а также не выписанными здесь уравнениями теории А. А. Уманского для стержней с закрытым профилем) сразу же можно усмотреть основное различие между теориями. Оно состоит в разном порядке многообразия функций, характеризующих перемещение точек стержня вдоль его оси. В то время как в общей теории допускается произвольная зависимость перемещения w от обеих переменных z и s , вид которой находится по ходу решения задачи, в прикладной теории вид зависимости w от переменных z и s устанавливается сразу при формулировке теории с точностью до четырех неизвестных функций z . Из этих четырех функций три характеризуют перемещение сечения как жесткого целого без деформации, так что последняя определяется единственной функцией.

Отличие картин перемещений немедленно сказывается и на точности описания напряжения σ_z ; в общей теории напряжение σ_z на торцах может быть задано в каждой точке торца, тогда как в прикладной теории возможна лишь интегральная характеристика распределения σ_z с помощью четырех факторов: Q_z , M_x , M_y , B_ω .

Соответственно сказанному, в общей теории удастся удовлетворить граничным условиям для w в каждой точке торцевого сечения, а в прикладной теории можно удовлетворить лишь в интегральном смысле „смягченным“ граничным условиям для напряжения σ_z . Таким образом, приближенная теория идет на одну ступень дальше использования классического принципа Сен-Венана: в ней учитывается не только статическая эквивалентность систем нормальных напряжений, но и „бимоментная“.

ГЛАВА II

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С ОТКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ

§ 1. Основные уравнения

Выше были отмечены вычислительные трудности, с которыми связано решение задачи о равновесии тонкостенного стержня в общем случае нагружения и граничных условий при использовании только одной кинематической гипотезы (недеформируемость контура). Практическая нужда в более простой теории настойчиво требует введения новых допущений, дающих существенное облегчение выкладок без значительной потери точности.

Такая теория для стержней с открытым профилем была с большой обстоятельностью развита В. З. Власовым в ряде его исследований, суммированных в монографии [5].

Основой этой теории вместе с гипотезой недеформируемости контура служит следующее допущение: *во всех случаях нагружения тонкостенного стержня с открытым профилем можно положить, что сдвиг срединной поверхности равен нулю*

$$\gamma_{zs} = 0. \quad (1)$$

Эта основная гипотеза рассматриваемой здесь теории точно выполняется в задачах о чистом изгибе и о чистом кручении. Для задач более общего класса, когда рассматриваются произвольные нагрузки, выражение (1) должно трактоваться как утверждение о второстепенности деформации γ_{zs} в том смысле, как об этом говорилось в § 5 гл. I. Поэтому, принимая (1), мы впоследствии будем определять касательное напряжение τ_{zs} не с помощью закона Гука по сдвигу γ_{zs} , а из условий равновесия,

Подставим в формулу, определяющую сдвиг:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

выражение для перемещения u по направлению касательной к срединной линии поперечного сечения:

$$u = \vartheta r - \xi_0 \sin \beta + \eta_0 \cos \beta,$$

где, как и раньше:

$\vartheta(z)$ — угол поворота сечения вокруг полюса;

$r(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную в текущей точке срединной линии сечения [при этом полюс может и не совпадать с началом координат, так что $r(s)$ нельзя вычислять по формуле $r(s) = xy' - yx'$];

ξ_0, η_0 — проекции перемещения полюса на направления осей x и y ; последние в этой главе будут считаться совпадающими с главными центральными осями инерции сечения.

β — угол между положительным направлением оси x и внешней нормалью (фиг. 10).

Тогда *

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \dot{\vartheta} r - \dot{\xi}_0 \sin \beta + \dot{\eta}_0 \cos \beta.$$

Имея в виду, что

$$-\sin \beta = \frac{dx}{ds} = x'; \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds} = y',$$

получим при учете (1) уравнение для определения $w(z, s)$:

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \dot{\vartheta} r + \dot{\xi}_0 x' + \dot{\eta}_0 y' = 0.$$

После интегрирования по s найдем:

$$w = -\dot{\vartheta} \int r ds - \dot{\xi}_0 \int x' ds - \dot{\eta}_0 \int y' ds + \zeta(z). \quad (2)$$

* Точками над буквами обозначается дифференцирование по z и штрихами — по s .

Здесь через $\zeta(z)$ обозначена неизвестная функция координаты z , получившаяся при интегрировании.

Выражению (2) можно придать вид:

$$w = -\ddot{\eta}\omega - \dot{\xi}_0 x - \dot{\eta}_0 y + \zeta(z), \quad (3)$$

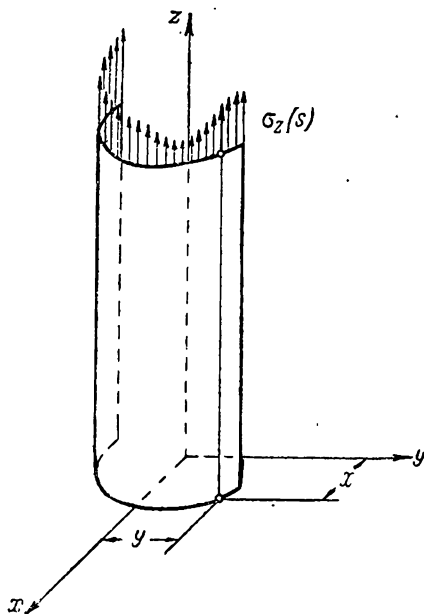
где вместо $\int_0^s r ds$ введена секториальная площадь $\omega(s)$, равная удвоенной площади сектора, изображенного выше на фиг. 8.

Подставляя (3) в формулу, определяющую нормальное напряжение, имеем:

$$\sigma_z = \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z} = -\bar{E} [\ddot{\eta}\omega + \dot{\xi}_0 x + \dot{\eta}_0 y - \dot{\zeta}]. \quad (4)$$

Условия статической эквивалентности системы напряжений σ_z в сечении $z = \text{const}$ растягивающей силе Q_z и изгибающим моментам M_x и M_y имеют вид (фиг. 15):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \sigma_z h ds &= Q_z, \\ \int_0^l \sigma_z x h ds &= -M_y, \\ \int_0^l \sigma_z y h ds &= M_x. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



Фиг. 15.

Дифференцирование двух последних уравнений по z возвращает нас к приведенным в первой главе уравнениям (22) — (23).

Прежде чем подставить в (5) выражение (4), *выберем точку в такой точке, чтобы обратились в нуль интегралы:*

$$\int_0^l \omega x h ds = 0, \quad \int_0^l \omega y h ds = 0. \quad (6)$$

Фактическое определение координат, отвечающих этим условиям, дано ниже в § 2, где также показано, что выполнение условий (6) всегда возможно. Из (4) и (5) имеем:

$$\left. \begin{aligned} -\ddot{\vartheta}_0 \int_0^l \omega h ds + \dot{\zeta} F &= \frac{Q_z}{E}, \\ -\ddot{\xi}_0 I_y &= -\frac{M_y}{E}, \quad -\ddot{\eta}_0 I_x = \frac{M_x}{E}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $I_x = \int_0^l y^2 h ds$, $I_y = \int_0^l x^2 h ds$ — главные центральные моменты инерции сечения стержня; $F = \int_0^l h ds$ — площадь сечения

При выводе уравнений (7), кроме соотношений (6), учтены равенства

$$\int_0^l x h ds = 0; \quad \int_0^l y h ds = 0; \quad \int_0^l x y h ds = 0,$$

справедливые вследствие того, что оси x и y являются главными центральными осями инерции сечения. Из (7) находим:

$$\dot{\zeta} = \frac{Q_z}{EF} + \frac{\ddot{\vartheta}}{F} \int_0^l \omega h ds, \quad (8)$$

$$\ddot{\xi}_0 = \frac{M_y}{EI_y}, \quad (9)$$

$$\ddot{\eta}_0 = -\frac{M_x}{EI_x}. \quad (10)$$

Тогда (4) приобретает вид:

$$\sigma_z = -E\ddot{\omega} \left(\omega + \int_0^l \omega h ds \right) - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{Q_z}{F}. \quad (11)$$

В этой формуле последние три члена представляют собой известное из теории сопротивления материалов плоское распределение нормальных напряжений, отвечающее изгибу и растяжению стержня. Первый член выражает особое *секториальное* распределение σ_z , соответствующее закручиванию стержня*.

Это позволяет оставить в стороне вопрос о растяжении и изгибе стержня, сосредоточив все внимание на закручивании стержня под действием крутящих моментов**.

Найдем величину

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{1}{F} \int_0^l \omega h ds \quad (12)$$

главной секториальной площадью. Заметим, что главная секториальная площадь не зависит от начала отсчета дуг, так как при изменении этого начала оба слагаемых в правой части (12) получают одинаковые по величине, но разные по знаку приращения.

Интегрируя соотношения (8)–(10) по координате z один раз и подставляя полученные при этом результаты в выражение (3) для перемещения w , имеем

$$w = -\ddot{\omega}(s) - \frac{x}{EI_y} \int_0^z M_y dz - \frac{y}{EI_x} \int_0^z M_x dz + \\ + \frac{1}{EF} \int_0^z Q_z dz + C_1 x(s) + C_2 y(s) + C_3. \quad (13)$$

* Если производная $\dot{\omega}$ постоянна, то первое слагаемое в формуле (11) обращается в нуль, и кручение стержня не вызывает нормальных напряжений.

** Ниже, в § 4, мы специально остановимся на случае закручивания под действием продольных сил.

Последние три члена, содержащие произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 , выражают перемещения стержня как твердого тела вдоль оси z (постоянная C_3) при одновременных поворотах вокруг осей x и y (постоянные C_2 и C_1).

Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда на стержень действует только крутящий момент M_z , т. е. когда

$$Q_z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0.$$

При этом на основании (12) нормальное напряжение σ_z связано с главной секториальной площадью соотношением:

$$\sigma_z = -\bar{E} \ddot{\omega}. \quad (14)$$

После подстановки в дифференциальное уравнение смешанной системы уравнений статики [формула (25), гл. I]

$$h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{zs} h) = 0$$

значения σ_z из (14) получаем дифференциальное уравнение для определения касательного напряжения

$$\frac{\partial (\tau_{zs} h)}{\partial s} = \bar{E} \ddot{\omega} h.$$

Интегрируя это соотношение, находим:

$$\tau_{zs} h = \bar{E} \ddot{\omega} \int_0^s \bar{\omega} h \, ds + (\tau_{zs} h)_{s=0}.$$

Совмещая начало отсчета дуг с началом срединной линии, упростим вид последней формулы, так как согласно граничному условию $(\tau_{zs} h)_{s=0} = 0$ (здесь предполагается, что края стержня свободны от касательных сил S):

$$\tau_{zs} = \frac{\bar{E}}{h(s)} \ddot{\omega} S_{\omega}(s), \quad (15)$$

где через S_{ω} обозначаем интеграл

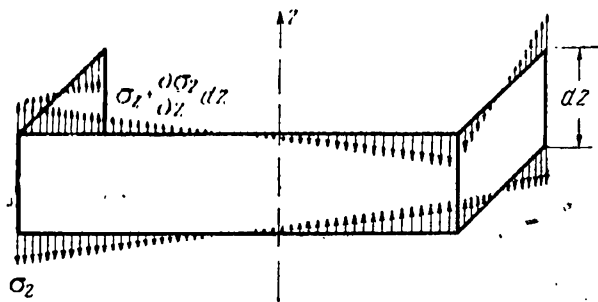
$$S_{\omega}(s) = \int_0^s \bar{\omega} h \, ds, \quad (16)$$

называемый ниже *секториальным статическим моментом*.

Другое граничное условие — обращение в нуль касательных напряжений на конце $s = l$ срединной линии — удовлетворяется автоматически, так как согласно (12):

$$\int_0^l \bar{\omega} h \, ds = 0. \quad (17)$$

Этот результат может быть легко осмыслен, если рассмотреть равновесие элементарного отрезка стержня под действием касательных напряжений τ_{zs} и самоуравновешенных систем



Фиг. 16.

нормальных напряжений σ_z и $\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz$ (фиг. 16). Так как край $s = 0$ свободен от касательных усилий, то уравнение равновесия в проекции на ось z показывает, что и на краю $s = l$ касательное напряжение также равно нулю.

Можно убедиться, что главный вектор системы касательных напряжений, описываемый формулой (15), равен нулю; действительно, его проекция на ось x дается очевидной формулой

$$-\int_0^l \tau_{zs} h \sin \beta \, ds = \bar{E} \ddot{\Theta} \int_0^l \frac{dx}{ds} \left[\int_0^s \bar{\omega} h \, ds \right] ds,$$

которая после интегрирования по частям принимает вид

$$\bar{E} \ddot{\Theta} \left[x \int_0^l \bar{\omega} h \, ds + \int_0^l \bar{\omega} x h \, ds \right].$$

Стоящие в этом выражении интегралы согласно (6) и (17) равны нулю.

Аналогично можно убедиться, что и вторая проекция главного вектора также обращается в нуль.

Таким образом, удовлетворив трем интегральным уравнениям равновесия (5) и дифференциальному уравнению равновесия [(25), гл. I], мы одновременно обеспечили выполнение еще двух интегральных уравнений равновесия $Q_x = 0$, $Q_y = 0$, соответствующих в рассматриваемой нами задаче о кручении стержня отсутствию перерезывающих сил в поперечном сечении.

Последнее интегральное уравнение равновесия выражает равенство момента внутренних касательных усилий, взятого относительно любой оси, перпендикулярной плоскости xu , полному крутящему моменту M_z . В это уравнение следует ввести, кроме касательных напряжений, данных формулой (15), также и распределенные крутящие моменты H_z соответственно сказанному в § 2 гл. I

$$\bar{M}_z = C\dot{\vartheta}, \quad (18)$$

где $C = \frac{\mu}{3} \int_0^l h^3 ds$ — жесткость при свободном кручении.

Выражение (18), строго справедливое для случая чистого кручения, может приближенно считаться удовлетворительным и в общем случае кручения. Вводимая при этом погрешность вряд ли превосходит погрешность, следующую из основного допущения (1). Тем не менее следует иметь в виду, что принимая (18), мы по существу делаем *новое допущение, принципиально независимое от основного*.

Проведя ось моментов перпендикулярно плоскости xu через полюс, имеем:

$$\int_0^l \tau_{zs} h r ds + C\dot{\vartheta} = M_z. \quad (19)$$

Подставляя сюда (15), получим

$$\bar{E}\ddot{\vartheta} \int_0^l S_{\omega} r ds + C\dot{\vartheta} = M_z. \quad (20)$$

Входящий в (20) интеграл преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^l r(s) \left[\int_0^s \bar{\omega} h ds \right] ds = \bar{\omega} \int_0^l \bar{\omega} h ds - \int_0^l \bar{\omega}^2 h ds.$$

Замечая теперь, что первое слагаемое согласно (17) равно нулю, получим, наконец, основное уравнение задачи:

$$\ddot{\vartheta} - \lambda^2 \dot{\vartheta} = -\frac{M_z}{EI_\omega}, \quad (21)$$

где

$$I_\omega = \int_0^l \bar{\omega}^2 h ds \quad (22)$$

есть так называемый *секториальный момент инерции* и

$$\lambda^2 = \frac{C}{EI_\omega}. \quad (23)$$

Построение решения уравнения (21) при заданных граничных условиях позволяет найти функцию $\vartheta(z)$, а затем по формулам (13) и (15) напряжения σ_z и τ_{zs} и по формуле (18) крутящие моменты H_z .

Так как для определения σ_z и τ_{zs} нам достаточно иметь выражения производных $\dot{\vartheta}$ и $\ddot{\vartheta}$, то удобно записать решение уравнения (21) относительно $\dot{\vartheta}$:

$$\dot{\vartheta} = A_1 \operatorname{sh} \lambda z + A_2 \operatorname{ch} \lambda z - \frac{1}{EI_\omega \lambda} \int_0^z M(z_1) \operatorname{sh} \lambda(z - z_1) dz_1. \quad (24)$$

Для нахождения входящих сюда произвольных постоянных A_1 и A_2 должны быть использованы граничные условия на торцах стержня. Рассмотрим уже упомянутые ранее в гл. I основные типы граничных условий.

1. Если конец свободен от нормальных напряжений ($\sigma_z = 0$), то согласно (13):

$$\ddot{\vartheta} = 0 \quad (25)$$

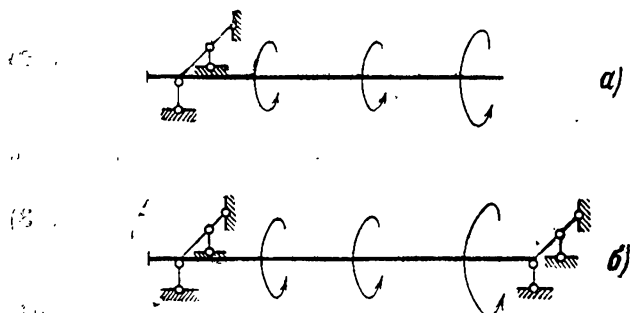
(см. фиг. 12 и 13).

2. Если конец закреплен так, что $w = 0$, то согласно (2):

$$\dot{\vartheta} = 0 \quad (26)$$

(см. фиг. 11 и 14).

Задание граничных условий на обоих торцах позволяет найти обе постоянные, входящие в (24).



Фиг. 17.

Фактическое использование решения (24) предполагает, что закон изменения полных крутящих моментов M_z по длине стержня известен, т. е. что задача о нахождении функции $M_z(z)$ статически определима; подобного рода случаи возможны, если стержень имеет не более одной заделки (фиг. 17, а).

Однако в ряде случаев полные крутящие моменты в сечениях не подчиняются чисто статическому определению (см. фиг. 17, б); в подобного рода задачах, которые можно назвать задачами с внешней статической неопределимостью, приходится несколько изменить вид основного уравнения. Для этого необходимо дифференцированием (21) по z исключить из правой части уравнения (21) величину полного кру-

гнцего момента и перейти к заданной величине погонной моментной нагрузки ($m(z) = \frac{dM_z}{dz}$):

$$\vartheta^{IV} - \lambda^2 \ddot{\vartheta} = -\frac{m(z)}{\bar{E}I_\omega}.$$

Общий интеграл уравнения (27) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vartheta = & A_1 + A_2 z + A_3 \operatorname{sh} \lambda z + A_4 \operatorname{ch} \lambda z - \\ & - \frac{1}{C\lambda} \int_0^z m(z_1) [\operatorname{sh} \lambda(z - z_1) - \lambda(z - z_1)] dz_1. \end{aligned} \quad (28)$$

В случае, если в сечении $z = L_1$ извне приложена сосредоточенная крутящая пара с моментом M_{z_1} , то последний интеграл при переходе через сечение $z = L_1$ приобретает дополнительное слагаемое:

$$M_{z_1} [\operatorname{sh} \lambda(z - L_1) - \lambda(z - L_1)]. \quad (29)$$

Рассмотрим вновь частные виды граничных условий на торцах.

1. *Совершенно свободный конец* — возможен свободный поворот, нормальные напряжения исключены. При этом, в согласии с (14):

$$\ddot{\vartheta} = 0,$$

и крутящий момент, приложенный в этом сечении извне, на основании (21) равен:

$$M_z = C\dot{\vartheta} - \bar{E}I_\omega \ddot{\vartheta}$$

(фиг. 12).

2. *Полузакрепленный конец* — торец свободен от нормальных напряжений, но поворот концевое сечения невозможен (фиг. 13). При этом, очевидно, что $\sigma_z = 0$ и

$$\ddot{\vartheta} = 0 \text{ и } \dot{\vartheta} = 0.$$

3. *Полузакрепленный конец* — перемещения w невозможны, но возможен свободный поворот концевое сечения. При этом вследствие равенства $w = 0$:

$$\dot{\vartheta} = 0,$$

а извне приложенный крутящий момент равен $M_z = -\bar{E}C\ddot{\vartheta}$ (фиг. 14).

4. *Совершенно закрепленный конец* — исключены как поворот ϑ , так и перемещения w . При этом $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ (фиг. 11).

Приведем также необходимые для непосредственного использования этих условий выражения производных угла закручивания:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= A_2 + \lambda A_3 \operatorname{ch} \lambda z + \lambda A_4 \operatorname{sh} \lambda z - \\ &\quad - \frac{1}{C} \int_0^z m(z_1) [\operatorname{ch} \lambda (z - z_1) - 1] dz_1, \\ \ddot{\vartheta} &= \lambda^2 A_3 \operatorname{sh} \lambda z + \lambda^2 A_4 \operatorname{ch} \lambda z - \\ &\quad - \frac{\lambda}{C} \int_0^z m(z_1) \operatorname{sh} \lambda (z - z_1) dz_1, \\ \ddot{\vartheta} &= \lambda^3 A_3 \operatorname{ch} \lambda z + \lambda^3 A_4 \operatorname{sh} \lambda z - \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{C} \int_0^z m(z_1) \operatorname{ch} \lambda (z - z_1) dz_1. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Изложенная выше теория построена, как мы видели, следующим образом: во-первых, в дополнение к гипотезе о неизменяемости контура принято, что $\gamma_{zs} = 0$ и отсюда получено распределение перемещений w по поперечному сечению; далее, в соответствии с законом Гука нормальное напряжение выражено через перемещение w , после чего из условия равновесия элемента найдено касательное напряжение. Наконец, последнее интегральное уравнение статики позволило получить условие для нахождения оставшегося неопределенным угла поворота $\vartheta(z)$. Ясно, что подобное решение обнаружит свою слабость при попытке сравнения полученных таким путем касательных напряжений с касательными напряжениями $\tau_{zs} = 0$, которые могут быть найдены с помощью закона Гука из принятой картины деформации.

Обнаруживаемое при этом несоответствие оказывается прямым следствием произвольности исходной гипотезы (1) и становится особенно резким в сечениях, остающихся плфо-

скими (заделка); действительно, в заделке $\omega = 0$, а так как ω пропорционально $\dot{\vartheta}$, то следовательно $\dot{\vartheta} = 0$. Отсюда немедленно вытекает в соответствии с (18), что в заделке крутящий момент $S\dot{\vartheta}$ полностью отсутствует, и крутильный момент M_z воспринимается только касательными напряжениями τ_{zs} , данными формулой (11). С другой стороны, последние, в сущности, должны рассматриваться как вторичный эффект, носящий характер поправки к основному эффекту кручения — крутящему моменту \bar{M}_z (именно в этом и следует видеть основание для применения зависимости (1) в задаче стесненного кручения). Тем самым оказывается, что вторичный эффект полностью вытесняет основной эффект; это делает сомнительным подобное решение, главным образом, вблизи мест закрепления.

Полностью преодолеть такое несоответствие в рамках приближенной теории, конечно, нельзя — это становится возможным только на путях точного решения.

С другой стороны, следует отметить, что подобные несоответствия естественны для приближенных теорий и часто не содержат действительной угрозы точности результатов.

§ 2. Секториальные характеристики

Все полученные выше расчетные формулы тесно связаны с понятием о секториальной площади. Нормальные напряжения, согласно (13), пропорциональны главной секториальной площади $\bar{\omega}$, касательные напряжения, согласно (15), пропорциональны секториальному статическому моменту $S_{\omega}(s)$; кроме того, важную роль играет величина секториального момента инерции I_{ω} , данная выражением (22).

Остановимся теперь на свойствах перечисленных секториальных характеристик.

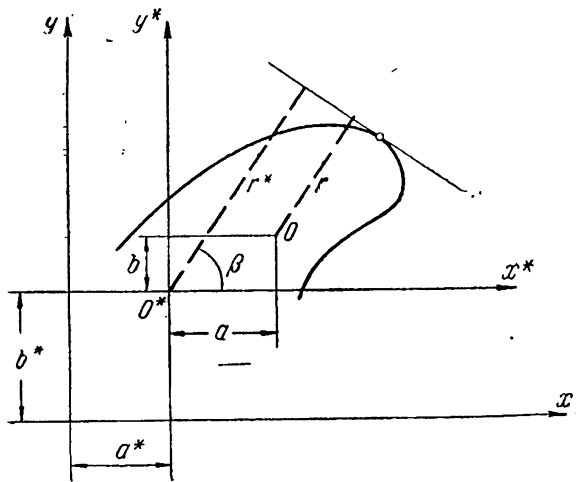
Прежде всего выведем закон преобразования секториальной площади при перемещении полюса и изменении начала отсчета секториальных площадей.

Выберем в качестве исходного полюса начало координатной системы x^* , y^* , причем оси x^* и y^* параллельны главным центральным осям x и y (см. фиг. 18). Соответствующие этому полюсу величины перпендикуляров будем

обозначать через $r^*(s)$, а величины секториальных площадей — через $\omega^*(s)$, при этом

$$\omega^*(s) = \int_0^s r^*(s) ds + \omega_0^*,$$

где ω_0^* — постоянная, зависящая от выбора начала отсчета дуг.



Фиг. 18.

Примем точку O с координатами a и b в системе x^*, y^* за новый полюс. Соответствующие этому полюсу секториальные площади и радиусы будем обозначать теми же буквами ω и r , но без звездочек:

$$\omega = \int_0^s r(s) ds + \omega_0.$$

Из фиг. 18 видно, что между величинами r^* и r существует зависимость

$$r^* = r + a \cos \beta + b \sin \beta,$$

где β — угол между внешней нормалью к контуру в данной точке и осью x^* ,

Подставляя значение r^* в выражение секториальной площади ω^* , найдем связь между величинами ω^* и ω в виде:

$$\omega^* = \int_0^l r^* ds + \omega_0^* = (\omega - \omega_0) - b(x^* - x_0^*) + a(y^* - y_0^*) + \omega_0^*,$$

где x^* и y^* — координаты текущей точки срединной линии контура в системе x^*y^* ; при этом $x_0^* = x^*(0)$, $y_0^* = y^*(0)$.

Последнее выражение можно записать в виде:

$$\omega = \omega^* + bx^* - ay^* + c^*,$$

где $c^* = \omega_0 - \omega_0^* + ay_0^* - bx_0^*$ — постоянная.

Заменяя теперь координаты x^* и y^* на координаты x и y в системе главных центральных осей (фиг. 18):

$$x^* = x - a^*, \quad y^* = y - b^*,$$

получим

$$\omega = \omega^* + bx - ay + c, \quad (31)$$

где $c = c^* - a^*b + b^*a$ — новая постоянная.

Формула (31) и выражает *искомый закон преобразования секториальных площадей*.

Обратимся теперь к определению координат a_0 и b_0 точки, обладающей тем свойством, что при выборе ее за полюс секториальной площади выполняются условия

$$\int_0^l \omega x h ds = 0, \quad \int_0^l \omega y h ds = 0, \quad (32)$$

введенные в предыдущем параграфе.

Подставляя (31) в (32), найдем независимо от выбора начала отсчета дуг

$$\int_0^l \omega^* x h ds + b_0 I_y = 0; \quad \int_0^l \omega^* y h ds - a_0 I_x = 0,$$

где попрежнему I_x и I_y — главные центральные моменты инерции.

Отсюда окончательно получаем

$$a_0 = \frac{1}{I_x} \int_0^l \omega^* y h \, ds; \quad b_0 = -\frac{1}{I_y} \int_0^l \omega^* x h \, ds. \quad (33)$$

Этими формулами полностью определяются *координаты a_0 и b_0 искомого полюса секториальных площадей*, являющегося одновременно центром кручения (мгновенным центром, вокруг которого происходит поворот).

Подчеркнем, что в формулах (33) секториальная площадь ω^* может быть подсчитана при полюсе, находящемся в любой точке, тогда как координаты x и y должны быть взяты обязательно в системе главных центральных осей инерции. При этом величины a_0 и b_0 определяют координаты искомого полюса в системе осей x^* и y^* с началом в выбранном полюсе секториальных площадей ω^* .

Сразу же отметим, что положение центра кручения определяется исключительно геометрическими характеристиками профиля и не зависит от распределения нагрузки по длине стержня, а также и от граничных условий на его концах. Это обозначает, что в призматическом тонкостенном стержне геометрическое место центров кручения представляет собой прямую линию — ось кручения, вокруг которой и происходят повороты сечений.

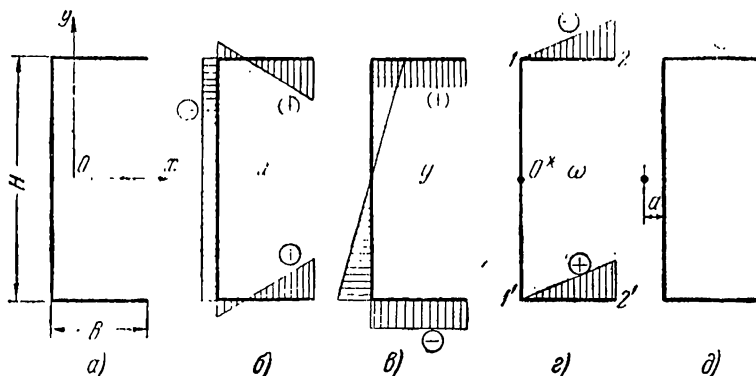
Если чисто-крутящие воздействия не вызывают в плоскости сечения $хоу$ никаких перемещений точек, принадлежащих оси кручения, то согласно теореме о взаимности перемещений можно утверждать, что всякие поперечные нагрузки, равнодействующие которых проходят через ось кручения стержня, не вызовут никаких эффектов кручения. Это обстоятельство снова подтверждает возможность раздельного рассмотрения задач о кручении и изгибе (при использовании для анализа последней задачи той приближенной теории, которая вытекает из гипотезы плоских сечений и относится к области сопротивления материалов).

Рассмотрим вычисление координат центра кручения на примере швеллера (фиг. 19,а). На фиг. 19,б и 19,в показаны эпюры функции $x(s)$ и $y(s)$. Вспомогательный полюс O^* примем в середине стенки.

От этой же точки будем отсчитывать дугу s . Простое вычисление дает (см. фиг. 19,2):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0, & \omega'_1 &= 0, \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2} BH, & \omega'_2 &= \frac{1}{2} BH.\end{aligned}$$

При определении знаков считаем положительным направление обхода против часовой стрелки. На графике $\omega(s)$



Фиг. 19.

сечению каждой плоской стенки отвечает прямолинейный участок, так как при росте дуги s величина $r(s)$ остается для таких стенок постоянной.

Вычисление по формулам (33) дает при $h = \text{const}$:

$$a_0 = -\frac{B}{2 \left[1 + \frac{H}{6B} \right]}, \quad b_0 = 0.$$

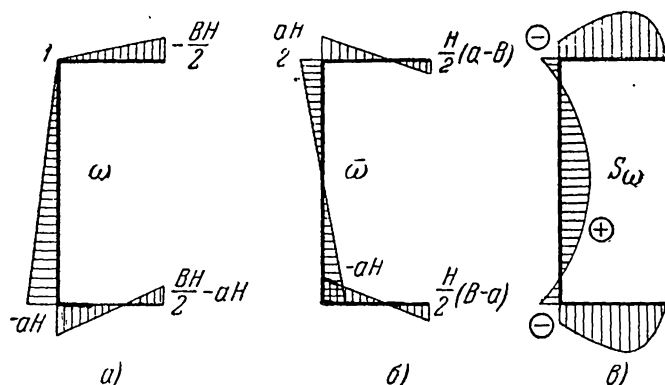
Совпадение полюса с осью симметрии профиля x является, очевидно, общим правилом, вытекающим из ортогональности эпюр $x(s)$ и $\omega(s)$ (первая эпюра симметрична, тогда как вторая обратно симметрична относительно оси симметрии профиля).

Напомним, что координаты a_0 и b_0 измеряются в системе осей с началом не в центре тяжести сечения O , а с началом

в точке O^* . Найденный полюс, являющейся центром кручения, показан на фиг. 19, д.

Координаты центра кручения и геометрические жесткости для некоторых других профилей даны в табл. 1.

После определения полюса секториальных площадей во всяком практическом расчете необходимо построить эпюру



Фиг. 20.

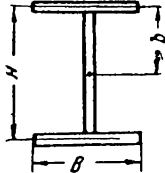
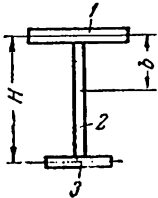
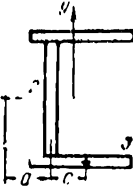
главных секториальных площадей $\bar{\omega}$; для этого строятся сначала эпюра ω при произвольном начале отсчета (для швеллера такая эпюра показана на фиг. 20, а, началом отсчета дуг служит точка I) и при полюсе в центре кручения, а затем производится пересчет главных секториальных площадей по формуле (12). Для швеллера, показанного на фиг. 19, а, вычисление дает:

$$\int_0^I \omega h ds = -\frac{Hah}{2}(H + 2B).$$

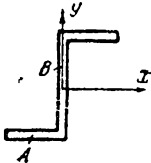
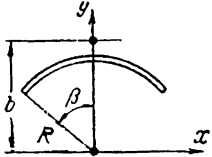
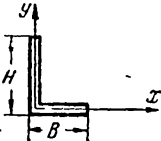
Согласно выражению (12) эпюра $\bar{\omega}$ получается из эпюры ω изменением всех ординат на величину

$$-\frac{1}{F}\left(-\frac{Hah}{2}\right)(H + 2B) = \frac{Ha}{2}.$$

Таблица 1

№№	Тип сечения	Координаты центра кручения	Геометрическая жесткость $I_d = \frac{C}{\mu}$
1		$b = \frac{H}{2}$	$\frac{2B + H}{3} h^3$
2		$b = \frac{I_{zy}}{I_y} H$	$\frac{B_1 + B_2 + H}{3} h^3$
3		$a = \frac{2I_{xy}}{I_x} c$	$\frac{2B + H}{3} h^3$

Продолжение табл. I

№№	Тип сечения	Координаты центра кручения	Геометрическая жесткость $I_d = \frac{C}{\mu}$
4		$a = 0; b = 0$	$\frac{(2A + B)}{3} h^3$
5		$b = 2R \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$	$\frac{2R\beta}{3} h^3$
6		$a = 0; b = 0$	$\frac{(B + H)}{3} h^3$

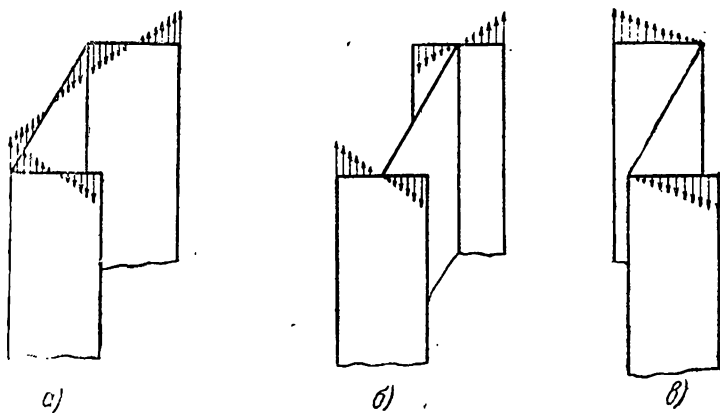
Эпюры главных секториальных площадей швеллера показаны на фиг. 20,б. Секториальные статические моменты

$$S_{\omega} = \int_0^s \bar{\omega} h ds$$

вычисляются при начале отсчета дуг в крайней точке сечения (см. фиг. 20,в).

В табл. 2 даны эпюры главных секториальных площадей ω и эпюры их интегралов $S_{\omega} = \int_0^s \bar{\omega} h ds$ для нескольких типов сечений.


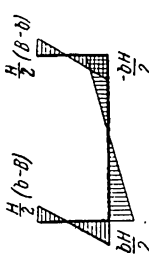
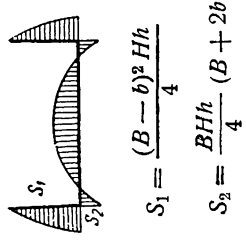

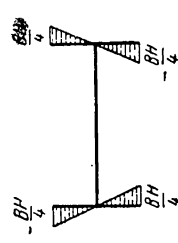
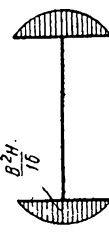
Главные секториальные площади определяют зависимость перемещения ω и напряжения σ_z от координаты s . На фиг. 21

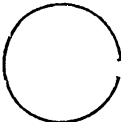
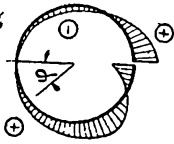
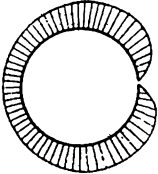
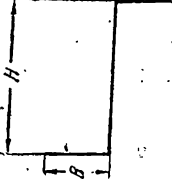
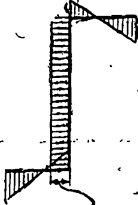
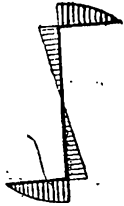


Фиг. 21.

показано распределение перемещений w по сечениям различных стержней (швеллер, двутавр, зетовый профиль). Тонкостенные стержни уголкового профиля обладают интересной особенностью — у них центр кручения всегда совпадает с точкой пересечения осей полков, и поэтому радиус $r(s)$ обращается в нуль, что приводит к исчезновению всех секториальных

Таблица 2

№№	Тип сечения	Эпюра главных секториальных площадей ω	Эпюра секториальных статических моментов S_{ω}	Величины I_{ω}
1			 $S_1 = \frac{(B-b)^2 Hh}{4}$ $S_2 = \frac{BHh}{4} (B+2b)$	$\frac{(B-3b) B^2 H^2 h}{6} + I_y b^2$
2				$\frac{B^3 H^2 h}{24}$

<p>3</p> 	 <p>$R^2 (\varphi - 2 \sin \varphi)$</p>	<p>$\frac{R^3 h}{2} (4 \cos \varphi + \varphi^2 - 5,86)$</p> 	<p>$\frac{2}{3} \pi R^3 h (\pi^2 - 6)$</p>
<p>4</p> 			<p>$I_x = \frac{B^3 H^2 h (2B^2 + 5BH + 2H^2)}{12 (2B + H)^2}$</p>

характеристик ($\bar{\omega} = 0$, $I_{\omega} = 0$, $S_{\omega} = 0$). Это обстоятельство может быть понято, если заметить, что при свободном кручении сохраняется плоская форма поперечных сечений; поэтому переход к задаче о стесненном кручении по существу не вносит новых связей, которые могли бы явиться источником дополнительных напряжений (σ_z , $\tau_{z\theta}$).

Подробный анализ секториальных характеристик различных открытых профилей был сделан в 1940 г. Д. В. Бычковым и А. К. Мрочинским [4]. Приведем некоторые из их выводов.

При сравнении ряда различных профилей одинаковой толщины и одинакового периметра оказалось:

1. Наибольшим секториальным моментом инерции обладают профили, полученные из трубы полигонального поперечного сечения путем продольного разреза вдоль одного из ребер. Для таких трубчатых сечений с разрезом одного и того же периметра и толщины получены нижеследующие результаты (I_{ω}^0 — секториальный момент инерции круглой трубы, I_{ω} — секториальный момент инерции рассматриваемой трубы):

Число граней трубы	3	4	6	∞
Отношение $\frac{I_{\omega}}{I_{\omega}^0}$	0,52	0,69	0,84	1,00

Как видно, с ростом числа граней величина секториального момента инерции возрастает.

2. Сравнение швеллера, двутавра и зетового профиля показывает наибольшую секториальную жесткость последнего. При тех же данных, что и выше, вычислено (высота профиля и ширина полок одинаковы):

Тип сечения	Швеллер	Двутавр	Зетовый профиль
Отношение $\frac{I_{\omega}}{I_{\omega}^0}$	0,34	0,20	0,49

3. Минимальные нормальные напряжения при кручении достигаются при следующих пропорциях поперечного сечения:

$$\text{швеллер} — F_1 = 0,232F; F_2 = 0,586F;$$

$$\text{двутавр} — F_1 = F_2 = \frac{1}{3} F;$$

$$\text{зетовый профиль} — F_1 = 0,188F; F_2 = 0,624F,$$

где

F_1 — площадь сечения полки,
 F_2 — площадь сечения стенки,
 F — полная площадь сечения.

§ 3. Решение уравнения стесненного кручения

Рассмотрев зависимости, определяющие изменение нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении, обратимся к исследованию распределения этих напряжений по длине стержня в зависимости от характера закружения и граничных условий на торцах.

Из (14) и (15) видно, что изменение нормальных напряжений вдоль стержня определяется второй производной угла поворота $\vartheta(z)$, а изменение касательных напряжений — третьей производной угла поворота $\vartheta(z)$.

Введем обозначения:

$$B_\omega = -EI_\omega \ddot{\vartheta} \quad (34)$$

и

$$\frac{dB_\omega}{dz} = M_\omega = -EI_\omega \ddot{\vartheta}. \quad (35)$$

При этом формулы (14) и (15) для напряжений могут быть записаны в виде:

$$\sigma_z = \frac{B_\omega}{I_\omega} \bar{\omega}(s), \quad (36)$$

$$\tau_{zs} = -\frac{M_\omega}{I_\omega h} S_\omega(s), \quad (37)$$

в котором формально достигнута структура, соответствующая формулам сопротивления материалов.

Для выяснения физического смысла величины B_ω умножим обе части формулы (36) на $\bar{\omega} h ds$ и проинтегрируем полученное равенство по всей срединной линии сечения:

$$\int_0^l \sigma_z \bar{\omega} h ds = \frac{B_\omega}{I_\omega} \int_0^l \bar{\omega}^2 h ds = B_\omega. \quad (38)$$

Отсюда видно, что величина B_ω представляет собой суммарный момент элементарных усилий $\sigma_z h ds$, который определен при „плече“ $\bar{\omega}$. Величина B_ω , как уже было сказано в гл. I, называется бимоментом. Ясно, что при плоском распределении нормальных напряжений:

$$\sigma_z = a_1 x + a_2 y + a_3,$$

бимомент обращается в нуль:

$$B_\omega = a_1 \int_0^l \bar{\omega} x h ds = a_2 \int_0^l \bar{\omega} y h ds + a_3 \int_0^l \bar{\omega} h ds = 0,$$

так как каждый из входящих сюда интегралов равен нулю. Поэтому можно сказать, что *бимомент выражает собой меру отклонения закона распределения σ_z от закона плоскости*.

Умножим теперь обе части (37) на $rh ds$ и проинтегрируем полученное равенство по всей срединной линии сечения:

$$\int_0^l \tau_{zs} h r ds = -\frac{M_\omega}{I_\omega} \int_0^l S_\omega(s) r h ds.$$

Но, как показано выше [см. соотношения (20) и (21)]:

$$\int_0^l S_\omega r h ds = -I_\omega,$$

так что

$$M_\omega = \int_0^l \tau_{zs} h r ds. \quad (39)$$

Таким образом, M_ω есть момент касательных усилий стесненного кручения, т. е. та *доля общего крутящего момента, которая создается напряжениями в срединной поверхности* τ_{zs} . Величина M_ω называется *изгибно-крутящим моментом*. При чистом кручении стержня касательные напряжения $\tau_{zs} = 0$, так что $M_\omega = 0$.

Из (36) и (37) видно, что определение напряжений сводится в конечном счете к нахождению величин B_ω и M_ω в сечениях стержня; обе эти величины являются функциями только координаты z .

Заметим, что дифференциальное уравнение для функции ϑ (27) может быть преобразовано к виду

$$\ddot{B}_\omega - \lambda^2 B_\omega = m \quad (40)$$

с граничными условиями:

- 1) свободный торец $B_\omega = 0$;
- 2) заделанный торец $\dot{B}_\omega = M_\omega = M$.

В качестве простейшего примера рассмотрим решение задачи о свободном кручении тонкостенного стержня произвольного открытого профиля моментами M_z , приложенными на торцах (кручение в смысле задачи Сен-Венана). В этой задаче граничные условия для уравнения третьего порядка (21) вследствие отсутствия нормальных напряжений на обоих торцах имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = 0 \\ \text{при } z = L \end{array} \right\} \ddot{\vartheta} = 0.$$

Используя выражение (24) и замечая, что $M(z) = M = \text{const}$, приходим к системе двух уравнений для определения постоянных A_1 и A_2 :

$$A_1 = 0, \\ A_1 \lambda \operatorname{sh} \lambda h + \left(A_2 - \frac{M}{EI_\omega \lambda^2} \right) \lambda \operatorname{ch} \lambda L = 0,$$

откуда

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{M}{EI_\omega \lambda^2} = \frac{M}{C}.$$

Тогда решение (24) примет вид:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{M}{C},$$

Следовательно, в рассматриваемой задаче обращаются в нуль величины $B_\omega = -\bar{E}I_\omega \ddot{\vartheta}$ и $M_\omega = -\bar{E}I_\omega \ddot{\vartheta}$; поэтому $\sigma_z = 0$, $\tau_{zs} = 0$ и $\bar{M}_s = M$. Перемещение w дается формулой:

$$w = -\frac{M_\omega}{C} \omega(s).$$

Рассмотрим теперь определение σ_z , τ_{zs} , B_ω и M_ω в более сложной задаче, относящейся к категории задач о стесненном кручении.

Пусть стержень произвольного открытого профиля скручивается моментом M , приложенным на торце $z = L$ при закреплённом торце $z = 0$. Тогда граничные условия имеют вид:

$$\text{при } z = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0;$$

$$\text{при } z = L, \quad \ddot{\vartheta} = 0, \quad C\dot{\vartheta} - \bar{E}I_\omega \ddot{\vartheta} = M;$$

они позволяют составить четыре уравнения для определения произвольных постоянных, входящих в общий интеграл (28); используя (30), имеем:

$$A_1 + A_4 = 0, \quad A_2 + \lambda A_3 = 0,$$

$$\lambda^2 A_3 \operatorname{sh} \lambda L + \lambda^2 A_4 \operatorname{ch} \lambda L = 0,$$

$$\lambda^2 [A_2 + \lambda A_3 \operatorname{ch} \lambda L + \lambda A_4 \operatorname{sh} \lambda L] - \lambda^3 [A_3 \operatorname{ch} \lambda L + A_4 \operatorname{sh} \lambda L] = \frac{M}{\bar{E}I_\omega},$$

откуда

$$A_1 = -\frac{M \operatorname{th} \lambda L}{\lambda^3 \bar{E}I_\omega}; \quad A_2 = \frac{M}{\lambda^2 \bar{E}I_\omega};$$

$$A_3 = -\frac{M}{\lambda^3 \bar{E}I_\omega}; \quad A_4 = \frac{M \operatorname{th} \lambda L}{\lambda^3 \bar{E}I_\omega}.$$

По формулам (34) и (35) находим:

$$B_\omega = -\bar{E}I_\omega \ddot{\vartheta} = \frac{M}{\lambda} [\operatorname{sh} \lambda z - \operatorname{th} \lambda L \cdot \operatorname{ch} \lambda z],$$

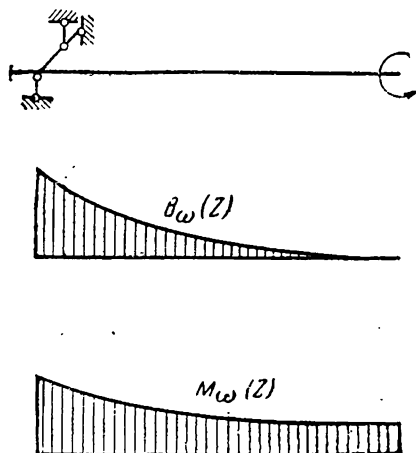
$$M_\omega = -\bar{E}I_\omega \ddot{\vartheta} = M [\operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{th} \lambda L \cdot \operatorname{ch} \lambda z],$$

или после простых преобразований

$$B_{\omega} = M \frac{\operatorname{sh} \lambda (z-L)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L}, \quad (41)$$

$$M_{\omega} = M \frac{\operatorname{ch} \lambda (z-L)}{\operatorname{ch} \lambda L}. \quad (42)$$

Графики изменения B_{ω} и M_{ω} по длине стержня даны на фиг. 22.



Фиг. 22.

Зная B_{ω} и M_{ω} , находим по формулам (36) и (37) напряжения σ_z и τ_{zs} :

$$\sigma_z = \frac{M}{I_{\omega}} \frac{\operatorname{sh} \lambda (z-L)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} \bar{\omega}(s), \quad (43)$$

$$\tau_{zs} = - \frac{M}{I_{\omega}} \frac{\operatorname{ch} \lambda (z-L)}{\operatorname{ch} \lambda L} S_{\omega}(s). \quad (44)$$

Кроме того, по выражению $w = \dot{\bar{\omega}}$ определяем перемещение w :

$$w = - \frac{M}{C} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda (L-z)}{\operatorname{ch} \lambda L} \right] \bar{\omega}(s). \quad (45)$$

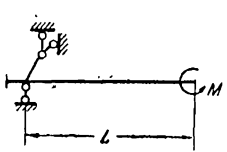
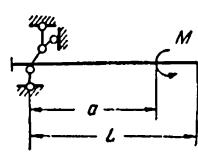
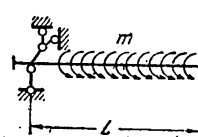
№№	Тип стержня и нагрузки	Бимоменты B_ω
1		$-M \frac{\operatorname{sh} \lambda (L-z)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L};$ $B_{\omega \max} = -M \frac{\operatorname{th} \lambda L}{\lambda}$
2		<p style="text-align: right;">Для левого</p> $-\frac{M}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} \{ [\operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda (L-a)] \times$ $\times \operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{ch} \lambda L \operatorname{sh} \lambda z \}$ <p style="text-align: right;">Для правого</p> $\frac{M}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{sh} \lambda (L-z) (\operatorname{ch} \lambda a - 1)$
3		$-\frac{m}{\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda L} [\lambda L \operatorname{sh} \lambda (L-z) -$ $- \operatorname{ch} \lambda L + \operatorname{ch} \lambda z]$


Таблица 3

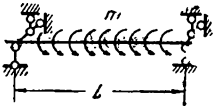
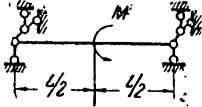
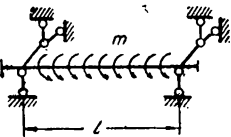
Изгибно-крутящие моменты M_ω	Величины ϑ
$\frac{M \operatorname{ch} \lambda (L - z)}{\operatorname{ch} \lambda L};$ $M_{\omega \max} = M$	$\frac{M}{\lambda^2 E I_\omega \operatorname{ch} \lambda L} \cdot [\operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{ch} \lambda (L - z)]$

участка

$\frac{M}{\operatorname{ch} \lambda L} \{ \operatorname{ch} \lambda L \cdot \operatorname{ch} \lambda z -$ $- [\operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda (L - a)] \cdot \operatorname{sh} \lambda z \}$	$\frac{M}{\lambda^2 E I_\omega \operatorname{ch} \lambda L} \{ [\operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda (L - a)] \times$ $\times \operatorname{sh} \lambda z - \operatorname{ch} \lambda L (\operatorname{ch} \lambda z - 1) \}$
---	--

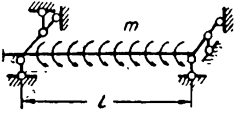
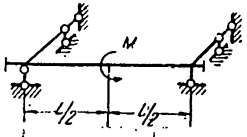
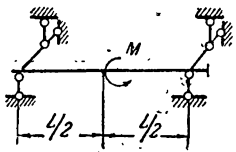
участка

$- \frac{M}{\operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{ch} (L - z) \times$ $\times (\operatorname{ch} \lambda a - 1)$	$\frac{M}{\lambda^2 E I_\omega \operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda (L - z) (\operatorname{ch} \lambda a - 1)$
 $- \frac{m}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} [\operatorname{sh} \lambda z - \lambda L \operatorname{ch} \lambda (L - z)]$	$\frac{m}{\lambda^3 E I_\omega \operatorname{ch} \lambda L} [\lambda (L - z) \times$ $\times \operatorname{ch} \lambda L + \operatorname{sh} \lambda z - \lambda L \operatorname{ch} \lambda (L - z)]$

№№	Тип стержня и нагрузки	Бимоменты B_ω
4		$\frac{m}{\lambda^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}} \right]$
5		<p style="text-align: right;">На левом</p> $\frac{M}{2\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}}$
6		$\frac{m}{\lambda^2} \left[1 - \frac{\lambda L \operatorname{ch} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}} \right]$

Продолжение табл. 3

Изгибно-крутящие моменты M_ω	Величины δ
$\frac{m}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}}$	$\frac{m}{\lambda^3 E I_\omega} \left[\lambda \left(\frac{L}{2} - z \right) - \frac{\operatorname{sh} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}} \right]$
участке	
$\frac{M \operatorname{ch} \lambda z}{2 \operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}}$	$\frac{M}{2 \lambda^2 E I_\omega} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}} \right)$
$\frac{m L \operatorname{sh} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}}$	$\frac{m}{\lambda^3 E I_\omega} \left[\lambda \left(\frac{L}{2} - z \right) - \frac{\lambda L \operatorname{sh} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}} \right]$

№№	Тип стержня и нагрузки	Бимоменты B_ω
7		$\frac{m}{\lambda^2} \left[1 - \operatorname{ch} \lambda (L-z) + \operatorname{sh} \lambda (L-z) \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \lambda L \operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{ch} \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \right]$
8		$\frac{M}{2\lambda} \frac{\operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{ch} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}}$
9		<p style="text-align: right;">На левом</p> $\frac{M}{\lambda} \frac{1}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \times \\ \times \left(\lambda L \operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right) \operatorname{sh} \lambda z$ <p style="text-align: right;">На правом</p> $\frac{M}{\lambda} \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \times \right. \\ \times \left(\lambda L \operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right) - \\ \left. - \operatorname{sh} \lambda \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]$

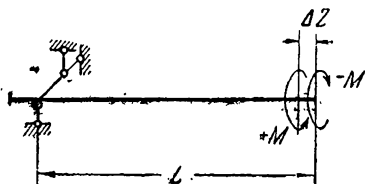
Изгибно-крутящие моменты M_ω	Величины δ
$\frac{m}{\lambda} \left[\operatorname{sh} \lambda (L-z) - \operatorname{ch} \lambda (L-z) \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \lambda L \operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{ch} \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \right]$	$\frac{m}{\lambda^3 EI_\omega} \left[\operatorname{sh} \lambda (L-z) + \lambda z - \right. \\ \left. \left(\frac{1 + \lambda L \operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{ch} \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} \lambda (L-z) + \frac{\operatorname{ch} \lambda L - 1 - \frac{\lambda^2 L^2}{2} \operatorname{ch} \lambda L}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \right]$
$\frac{M}{2} \frac{\operatorname{sh} \lambda z + \operatorname{sh} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}}$	$\frac{M}{2\lambda^2 EI_\omega} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \operatorname{sh} \lambda z - \operatorname{sh} \lambda \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}}$
<p>участке</p> $\frac{M}{\operatorname{sh} \lambda L - \lambda L \operatorname{ch} \lambda L} \times \\ \times \left(\lambda L \operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right) \operatorname{ch} \lambda z$ <p>участке</p> $M \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda L - \lambda L \operatorname{ch} \lambda L} \times \right. \\ \left. \times \left(\lambda L \operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \lambda \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]$	$\frac{M}{\lambda^2 EI_\omega} \left[1 - \frac{\frac{\lambda L}{2} \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda L \operatorname{ch} \frac{L}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda z \right]$ $\frac{M}{\lambda^2 EI_\omega} \left[\operatorname{ch} \lambda \left(z - \frac{L}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\frac{\lambda L}{2} \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda L \operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2}}{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \operatorname{sh} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda z \right]$

Подобным же образом могут быть получены аналогичные выражения для любых других случаев закрепления и внешней нагрузки.

В табл. 3 приведены выражения для B_ω и M_ω , значительно облегчающие выполнение конкретных расчетов; там же даны значения производной угла поворота $\dot{\theta}$, которые нам понадобятся в дальнейшем.

§ 4. Действие бипары. Бимоменты

Рассмотрим подробно один частный случай загрузки, который позволит установить некоторые специфические особенности деформации тонкостенного стержня и, в частности, необходимость осторожного применения принципа Сен-Венана, утверждающего локальность эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок.



Фиг. 23.

Пусть к свободному концу консольного тонкостенного стержня приложен крутящий момент $-M$, а в весьма малом удалении Δz от этого конца приложен момент $+M$, равный первому по абсолютной величине (фиг. 23). Пользуясь данными второй строки табл. 3, найдем бимомент на левом участке стержня, простирающегося от $z = 0$ до $z = L - \Delta z$, который вызван действием момента $-M$:

$$B_1 = M \frac{\operatorname{sh} \lambda (L - z)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L}.$$

Бимомент, вызванный моментом M , на том же участке будет

$$B_2 = -M \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda (L - z)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} - \frac{\operatorname{sh} \lambda \Delta z}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda z \right].$$

Тогда полный бимомент на участке от $z = 0$ до $z = L - \Delta z$ определяется формулой

$$B_\omega = \frac{M}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda \Delta z}{\operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda z. \quad (46)$$

Пусть теперь величина Δz стремится к нулю, причем момент M одновременно стремится к бесконечности таким образом, что произведение $M \cdot \Delta z$ остается неизменным:

$$M \cdot \Delta z = B.$$

Понимая под бипарой совокупность двух бесконечно близких, бесконечно больших крутящих моментов, назовем это произведение моментом бипары. Используя (46), предельным переходом получаем

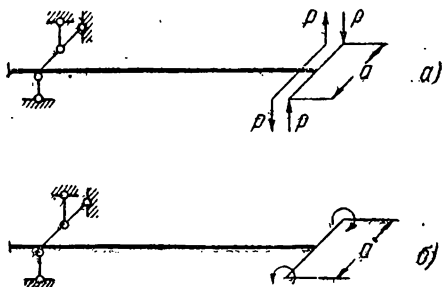
$$B_{\omega} = B \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{ch} \lambda L}. \quad (47)$$

Для торцового сечения при $z = L$ имеем

$$B_{\omega} = B.$$

Таким образом, бимомент на торце равен моменту бипары, приложенной к концу стержня.

Представление о бипаре было получено путем предельного перехода от случая действия двух противоположно направленных крутящих моментов, приложенных весьма близко один к другому. Согласно фиг. 24, а, это понятие может быть трактовано как результат неограниченного роста каждой из сил $\pm P$ при беспредельном убывании плеча Δz и сохранении плеча a . Однако такой предельный переход можно рассматривать и как процесс образования двух противоположно направленных конечных по величине изгибающих пар $\pm M = \frac{B}{a}$, как это показано на фиг. 24, б. Из этого следует,

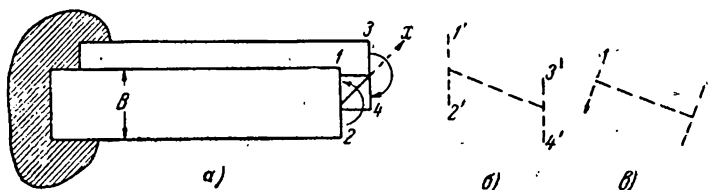


Фиг. 24.

что две одновременно действующие изгибающие пары вызовут кручение стержня, причем их эффект пропорционален расстоянию между плоскостями, в которых они действуют.

В таком случае загрузки за момент бипары (бимомент) надлежит считать произведение момента каждой из изгибающих пар на расстоянии между плоскостями их действия; это расстояние можно назвать *плечом бипары*.

Всякая изгибающая пара, действующая на стержень в стороне от оси кручения, может быть перенесена на ось кручения с одновременной компенсацией этого переноса бипарой, плечо которой равно расстоянию плоскости действия заданного момента от оси кручения. После такой трансформации нагрузки становится ясным, что высказанное



Фиг. 25.

А. и Л. Феппл в книге „Сила и деформация“ [19] утверждение: „В случае чистого изгиба плоскость действия внешних сил можно перемещать параллельно самой себе без изменения напряжений в балке“, — ошибочно.*

Происхождение закручивания при действии бипары может быть легко понято из рассмотрения задачи о нагружении двутавра парами, показанными на фиг. 25, а. Каждая из полок изгибается в своей плоскости; однако деформация, показанная на фиг. 25, б, невозможна; вследствие неизменяемости контура поперечного сечения каждая из полок вынуждена еще дополнительно повернуться таким образом, чтобы сохранилось первоначальное значение угла между полками и стенкой (фиг. 25, в). Поэтому изгиб полок в противоположных направлениях неизбежно вызывает закручивание поперечных сечений двутавра.

Приведем еще один пример, в котором внешняя нагрузка, не содержащая крутящих моментов, вызывает закручивание стержня. Пусть к свободному концу консольного стержня

* Ошибочность этого утверждения была впервые отмечена В. З. Власовым [6].

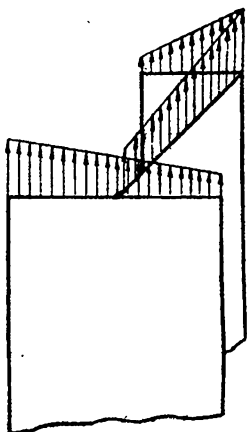
приложена извне распределенная по сечению система нормальных напряжений (фиг. 26), неподчиняющаяся закону плоскости;

при этом интеграл $\int_0^l \sigma \bar{\omega} h ds$, который представляет

собой бимомент в концевом сечении, отличен от нуля. Следовательно рассматриваемая здесь нагрузка приводится не только к интегральным силовым факторам M_x , M_y , Q_z , отвечающим плоскому распределению нормальных напряжений, но и к бимоменту B_ω . Наличие последнего указывает на закручивание стержня, так как $\ddot{\vartheta} = -\frac{B_\omega}{E I_\omega}$.

Природа этого закручивания может быть легко выяснена из рассмотрения более простого случая, когда торец стержня загружен конечной силой P , распределенной на малой дуге Δs (фиг. 27, а). При этом бимомент будет

$$B_\omega = \int_0^l \sigma \bar{\omega} h ds = \frac{P}{\Delta s} \int_{A - \frac{\Delta s}{2}}^{A + \frac{\Delta s}{2}} \bar{\omega} h ds,$$



Фиг. 26.

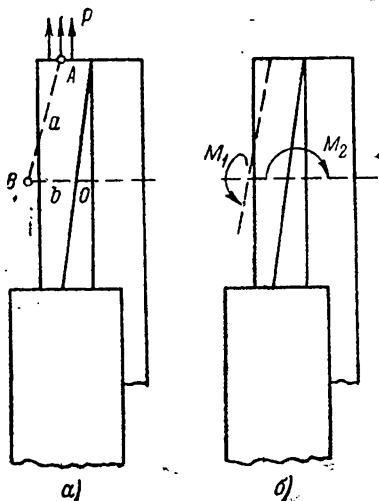
или после предельного перехода при $\Delta s \rightarrow 0$ имеем

$$B_\omega = P \bar{\omega}(A).$$

Возникновение бипары в этом случае отчетливо выясняется из фиг. 27, б. Перенесем силу P параллельно самой себе в точку B , лежащую на оси x , а затем перенесем ее в центр кручения. Этот двукратный перенос требует введения двух компенсирующих пар $M_1 = P \cdot a$ и $M_2 = P \cdot b$. Вторая из этих пар действует в плоскости, содержащей ось кручения, и вызывает только изгиб, тогда как первая пара действует в стороне от оси кручения и образует бимомент $P \cdot a \cdot b$; из рисунка видно, что величина ab равняется значению секториальной площади в точке A . Если точка приложения силы P совпадает с нулевой точкой эпюры $\bar{\omega}$, то стержень не закручивается.

Таким образом, бипара представляет собой особый тип самоуравновешенной нагрузки, вызывающей кручение тонкостенного стержня.

Нам надлежит преобразовать решение (28) так, чтобы помимо распределенных крутящих моментов и сосредоточенных крутящих пар учесть еще возможность приложения к стержню внешней нагрузки в виде бипар.



Фиг. 27.

Пусть в сечении $z - a$ приложен крутящий момент $-M$, а в сечении $a - \Delta z$ — крутящий момент $+M$. Первый момент вызывает в формуле (28) появление слагаемого вида (29):

$$\frac{M}{EI_{\omega}\lambda^3} [\operatorname{sh} \lambda(z-a) - \lambda(z-a)].$$

Второму крутящему моменту соответствует слагаемое того же типа:

$$-\frac{M}{EI_{\omega}\lambda^3} [\operatorname{sh} \lambda(z-a+\Delta z) - \lambda(z-a+\Delta z)].$$

Складывая последние выражения, получим

$$\frac{M}{EI_{\omega}\lambda^3} \left[\lambda \Delta z - 2 \operatorname{ch} \lambda \left(z - a + \frac{\Delta z}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{1}{2} \lambda \Delta z \right].$$

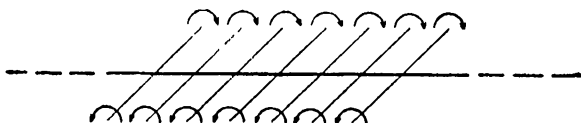
Переходя в этом выражении к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$, $M \cdot \Delta z = B$, найдем:

$$\frac{B}{EI_{\omega}\lambda^2} [1 - \operatorname{ch} \lambda(z-a)].$$

Поэтому общее решение уравнения (28) при действии только бипар $B_1, B_2 \dots B_k$ приобретает вид:

$$\vartheta = A_1 + A_2 z + A_3 \operatorname{sh} \lambda z + A_4 \operatorname{ch} \lambda z + \frac{1}{EI_{\omega}\lambda^2} \sum_{i=1}^k B_i [1 - \operatorname{ch} \lambda(z-a_i)]. \quad (48)$$

Это решение может быть обобщено на случай, когда внешней нагрузкой служат распределенные бипары (фиг. 28).



Фиг. 28.

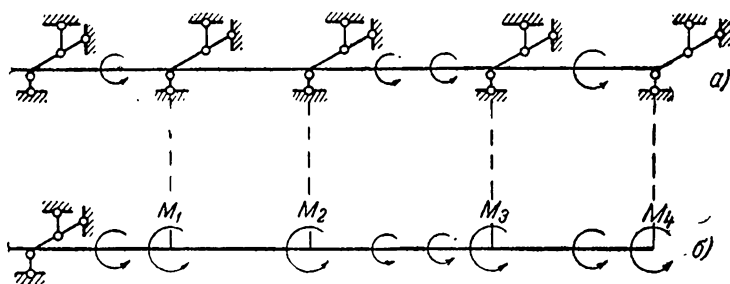
Обозначив погонную интенсивность такой бимоментной нагрузки через $b(\xi)$, получим решение уравнения (28) в виде:

$$\vartheta = A_1 + A_2 z + A_3 \operatorname{sh} \lambda z + A_4 \operatorname{ch} \lambda z + \frac{1}{EI_\omega \lambda^2} \int_0^z b(\xi) [1 - \operatorname{ch} \lambda (z - \xi)] d\xi. \quad (49)$$

Результаты рассмотрения трех конкретных примеров с помощью полученного решения даны в табл. 4.

§ 5. Неразрезные стержни

Если в нескольких сечениях стержня устранены повороты вокруг оси z , то определение опорных крутящих моментов становится статически неопределимой задачей (фиг. 29, а).



Фиг. 29.

В подобного рода задачах можно принять за лишние неизвестные указанные опорные моменты, используя в

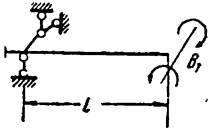
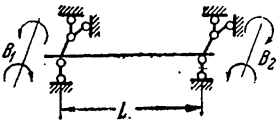
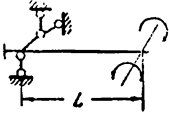
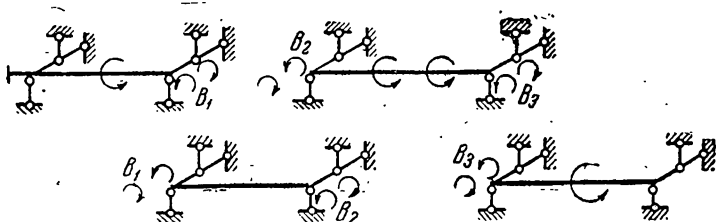
№№	Тип стержня и характер нагрузки бипарами	Бимоменты B_{ω}
1		$B_1 \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{ch} \lambda L}$
2		$B_1 \frac{\operatorname{sh} \lambda (L - z)}{\operatorname{sh} \lambda L} + B_2 \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda L}$
3		<p>На левом</p> $\frac{B}{\operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda (L - a) \operatorname{ch} \lambda z$ <p>На правом</p> $- \frac{B \lambda}{\operatorname{ch} \lambda L} \operatorname{sh} \lambda (L - z) \operatorname{sh} \lambda a$

Таблица 4

Изгибно-крутящие моменты M_ω	Величины δ
$B_1 \lambda \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{ch } \lambda L}$	$-\frac{B_1 \text{sh } \lambda z}{\lambda \bar{E} I_\omega \text{ch } \lambda L}$
$-B_1 \lambda \frac{\text{ch } \lambda (L-z)}{\text{sh } \lambda L} +$ $+B_2 \lambda \frac{\text{ch } \lambda z}{\text{sh } \lambda L}$	$-\frac{B_1}{\lambda \bar{E} I_\omega} \left[\frac{1}{\lambda L} - \frac{\text{ch } \lambda (L-z)}{\text{sh } \lambda L} \right] +$ $+\frac{B_2}{\lambda \bar{E} I_\omega} \left[\frac{1}{\lambda L} - \frac{\text{ch } \lambda z}{\text{sh } \lambda L} \right]$
участке	
$\frac{B \lambda \text{ch } \lambda (L-a)}{\text{ch } \lambda L} \text{sh } \lambda z$	$-\frac{B}{\lambda \bar{E} I_\omega \text{ch } \lambda L} \text{ch } \lambda (L-a) \text{sh } \lambda z$
участке	
$\frac{B \lambda}{\text{ch } \lambda L} \text{ch } \lambda (L-z) \text{sh } \lambda a$	$-\frac{B}{\lambda \bar{E} I_\omega \text{ch } \lambda L} \cdot \text{ch } \lambda (L-z) \text{sh } \lambda a$

сечениях извне лишние неизвестные — бипары B_k , определим величины последних из условия совпадения перемещений соответственных точек, принадлежащих концевым сечениям двух сложных участков.

Вспоминая формулу $w = -\dot{\vartheta}\bar{\omega}$, замечаем, что указанное совпадение перемещений выполняется при непрерывности производной угла закручивания в опорных сечениях стержня,



Фиг. 30.

т. е. при равенстве производных $\dot{\vartheta}_i^{\text{np}}$ и $\dot{\vartheta}_{i+1}^{\text{лев}}$; в последних выражениях индексом обозначен номер пролета.

Таким образом, переход от основной системы, изображенной на фиг. 29, б, к основной системе, данной на фиг. 30, означает замену лишних неизвестных M_k лишними неизвестными B_k и замену условий $\vartheta = 0$ в закрепленных сечениях условиями

$$\dot{\vartheta}_i^{\text{np}} = \dot{\vartheta}_{i+1}^{\text{лев}}. \quad (51)$$

Из второй строки последнего столбца табл. 4 находим для правого конца i -го пролета

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_i^{\text{np}} = & -\frac{B_{i-1}}{\lambda EI_{\omega}} \left[\frac{1}{\lambda L_i} - \frac{1}{\text{sh } \lambda L_i} \right] + \\ & + \frac{B_i}{\lambda EI_{\omega}} \left[\frac{1}{\lambda L_i} - \text{cth } \lambda L_i \right] + \alpha_i^{\text{np}}. \end{aligned}$$

Здесь через α_i^{np} обозначено значение производной угла поворота на правом конце i -го пролета, отвечающее заданной пролетной нагрузке при отсутствии концевых бимоментов.

Значения (α_i^{np}) могут быть взяты из табл. 3. Так же найдем для левого конца ($i+1$)-го пролета

$$\delta_{i+1}^{\text{лев}} = -\frac{B_i}{\lambda \bar{E} I_\omega} \left[\frac{1}{\lambda L_{i+1}} - \text{cth } \lambda L_{i+1} \right] + \\ + \frac{B_{i+1}}{\lambda \bar{E} I_\omega} \left[\frac{1}{\lambda L_{i+1}} - \frac{1}{\text{sh } \lambda L_{i+1}} \right] + \alpha_{i+1}^{\text{np}}.$$

В этой формуле через α_{i+1}^{np} обозначено значение производной угла поворота на левом конце ($i+1$)-го пролета при отсутствии концевых бимоментов (см. также табл. 3).

Вводя обозначения:

$$\frac{1}{\lambda L} \left(\frac{1}{\lambda L} - \frac{1}{\text{sh } \lambda L} \right) = S; \quad -\frac{1}{\lambda L} \left(\frac{1}{\lambda L} - \text{cth } \lambda L \right) = R \quad (52)$$

и подставляя полученные выражения производных угла поворота в уравнение неразрывности (51), найдем:

$$B_{i-1} S_i L_i + B_i (R_i L_i + R_{i+1} L_{i+1}) + B_{i+1} S_{i+1} L_{i+1} = \\ = \bar{E} I_\omega (-\alpha_i^{\text{np}} + \alpha_{i+1}^{\text{лев}}). \quad (53)$$

Это соотношение, называемое *уравнением трех бимоментов*, по своей структуре напоминает уравнение трех моментов, употребляемое при расчете неразрезных балок.

Число уравнений трех бимоментов равно числу промежуточных закреплений и совпадает с числом неизвестных задачи. Очевидным преимуществом системы (53) сравнительно с системой (50) является малое число неизвестных в каждом из уравнений.

Так как безразмерные величины S и R зависят только от аргумента λL , то они могут быть легко табулированы (табл. 5).

В двух простейших случаях загрузки нетрудно из табл. 2 получить значения правых частей уравнений (53).

1. При загрузке стержня равномерно распределенными по пролету крутящими парами:

$$\alpha^{\text{лев}} = \frac{m}{\lambda C} \left[\frac{\lambda L}{2} - \text{th } \frac{\lambda L}{2} \right]; \quad \alpha^{\text{np}} = -\alpha^{\text{лев}}.$$

Таблица 5

λL	R	S	λL	R	S
0,0	0,3333	0,1667	2,5	0,2452	0,0939
0,1	0,3331	0,1665	3,0	0,2239	0,0778
0,2	0,3324	0,1659	3,5	0,2046	0,0664
0,3	0,3314	0,1649	4,0	0,1877	0,0533
0,4	0,3298	0,1636	5,0	0,1630	0,0373
0,5	0,3279	0,1623	6,0	0,1389	0,0270
0,6	0,3256	0,1599	7,0	0,1225	0,0201
0,7	0,3229	0,1576	8,0	0,1094	0,0155
0,8	0,3199	0,1550	9,0	0,0988	0,0123
0,9	0,3166	0,1522	10,0	0,0900	0,0100
1,0	0,3130	0,1491	11,0	0,0826	0,0083
1,2	0,3052	0,1424	12,0	0,0764	0,0069
1,4	0,2966	0,1351	13,0	0,0710	0,0059
1,6	0,2875	0,1275	14,0	0,0663	0,0051
1,8	0,2781	0,1198	15,0	0,0622	0,0044
2,0	0,2687	0,1121			

2. При загрузении стержня посередине пролета сосредоточенной парой:

$$\alpha^{\text{лев}} = \frac{M}{2C} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}} \right]; \quad \alpha^{\text{пр}} = -\alpha^{\text{лев}}.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим пример, показанный на фиг. 31.

При равенстве длин всех пролетов уравнение трех бимоментов приобретает вид:

$$B_{i-1} S + 2 B_i R + B_{i+1} S = \frac{\bar{E} I_{\omega}}{L} \left[(\alpha_{i+1})^{\text{лев}} - (\alpha_i)^{\text{пр}} \right].$$

Тогда при $\lambda L = 2$ в сечении 1 имеем:

$$B_1 \cdot 0,2242 + B_2 \cdot 0,2687 = \frac{\bar{E} I_{\omega}}{\lambda} \frac{M}{C} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\lambda L}{2}} \right),$$

а в сечении 2:

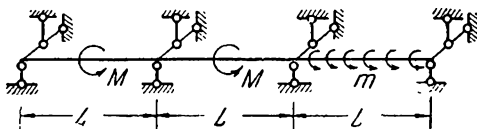
$$B_1 \cdot 0,2676 + B_2 \cdot 0,2242 = \frac{\bar{E} I_{\omega}}{\lambda} \frac{m}{C} \left(\frac{\lambda L}{2} - \operatorname{th} \frac{\lambda L}{2} \right).$$

Решая совместно эти уравнения, найдем:

$$B_1 = 0,72 mL^2 - 0,89 ML;$$

$$B_2 = 1,07 ML - 0,6 ML^2.$$

Теперь не представляет труда завершить расчет определением углов закручивания и напряжений; для этого каждый пролет

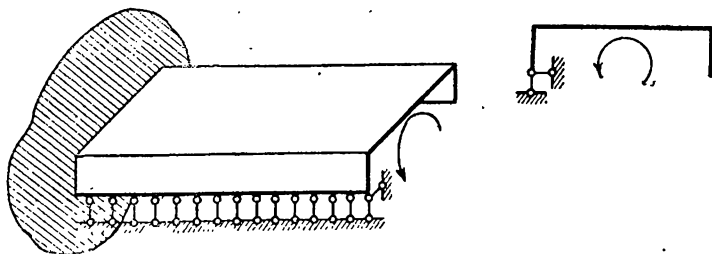


Фиг. 31.

рассматривается как отдельный стержень, к которому приложена заданная нагрузка и найденные выше концевые бимоменты.

§ 6. Кручение вокруг конструктивно заданных осей

В некоторых задачах ось кручения фиксируется самими особенностями конструкции. Подобного рода конструкция показана на фиг. 32. Практическая важность таких задач будет ниже иллюстрирована и другими примерами.



Фиг. 32.

Конструктивно заданная ось кручения в общем случае, когда она не совпадает с определенной выше осью кручения, вызывает непрерывно распределенные реакции, лежащие в плоскостях, параллельных координатной плоскости xu , и являющиеся для стержня поперечной нагрузкой; эти реакции

осложняют кручение стержня изгибом. При этом уравнения (33), определяющие положение мгновенного центра вращения, *теряют силу, так как в поперечном сечении изгибающие моменты уже не равны нулю*, поскольку наряду с заданной крутящей нагрузкой имеется еще и совокупность изгибающих нагрузок, возникающих на фиксированной оси кручения. Впрочем, в рассматриваемых задачах нет и надобности в этих уравнениях, так как *центр кручения всякого сечения оказывается фиксированным*.

Используя формулу (4), определяющую напряжение σ_z , и учитывая, что в нашем случае $\xi = 0$, $\eta = 0$, имеем

$$\sigma_z = -\bar{E} [\ddot{\omega}_0 - \dot{\zeta}],$$

где ω_0 — секторная площадь, определенная для полюса, лежащего на фиксированной оси кручения.

Положив в первом интегральном уравнении равновесия $Q_z = 0$, получим:

$$-\ddot{\omega}_0 \int_0^l \omega_0 h ds + \dot{\zeta} F = 0,$$

т. е.

$$\dot{\zeta} = -\frac{\ddot{\omega}_0}{F} \int_0^l \omega_0 h ds,$$

и окончательно

$$\sigma_z = -\bar{E} \ddot{\omega}_0 \left[\omega_0 - \frac{1}{F} \int_0^l \omega_0 h ds \right]. \quad (54)$$

Вводя обозначение

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 - \frac{1}{F} \int_0^l \omega_0 h ds,$$

имеем:

$$\sigma_z = -\bar{E} \ddot{\omega}_0 \bar{\omega}_0 = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega_0}} \bar{\omega}_0(s), \quad (55)$$

где $I_{\omega_0} = \int_0^l \omega_0^2 h ds$. При пользовании этой формулой нужно помнить, что начало отсчета дуг попрежнему несущественно,

а полюс секториальных площадей $\bar{\omega}_0$ лежит на фиксирующей оси кручения.

Определяя тем же путем, что и ранее, касательные напряжения τ_{zs} , снова получим:

$$\tau_{zs} = \frac{E\delta}{h} S_{\omega_0}(s), \quad (56)$$

где однако

$$S_{\omega_0} = \int_0^s \bar{\omega}_0 h ds.$$

Так как интеграл $\int_0^l \bar{\omega}_0 h ds$ равен нулю и в нашем случае, то граничные условия для τ_{zs} выполняются на обоих концах; подсчет выражений

$$Q_x = \int_0^l \tau_{zs} h x' ds; \quad Q_y = \int_0^l \tau_{zs} h y' ds$$

показывает, что они отличны от нуля. Этими выражениями определяются перерезывающие силы, возникающие от реакций на фиксированной оси кручения.

В подобных случаях нельзя утверждать, что смещение оси кручения на фиксированную прямую влечет за собой возрастание напряжений в связи с очевидным увеличением величин $\bar{\omega}_0$ и S_{ω_0} , входящих в расчетные выражения для нормальных и касательных напряжений σ_z и τ_{zs} ; действительно, наряду с ростом указанных величин увеличивается и величина секториального момента инерции I_{ω_0} [см. ниже формулу (60)].

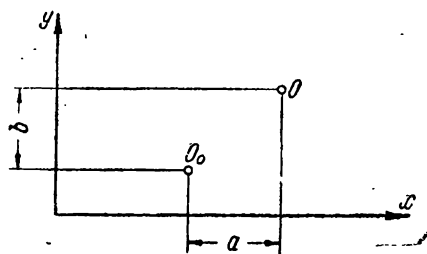
Для удобства использования формул (55) и (56) дадим соотношения, связывающие секториальные характеристики $\bar{\omega}$, S_{ω} , I_{ω} с секториальными характеристиками $\bar{\omega}_0$, S_{ω_0} , I_{ω_0} .

На основании формулы (31) имеем

$$\omega = \omega_0 + bx - ay + c,$$

где ω — секториальная площадь с полюсом в геометрическом центре кручения O ;

ω_0 — секториальная площадь с полюсом в фиксированном центре кручения O_0 ;
 a и b — проекции отрезка $\overline{O_0O}$ на оси x и y ;
 x и y — координаты точек средней линии в системе главных центральных осей (фиг. 33);



Фиг. 33.

c — постоянная, связанная с положением начала отсчета дуг.

Из этой формулы следует:

$$\omega_0 = \omega - bx + ay - c. \quad (57)$$

Подставляя это в выражение

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 - \frac{1}{F} \int_0^l \omega_0 h \, ds,$$

получаем

$$\bar{\omega}_0 = \omega + ay - bx - \frac{1}{F} \int_0^l \omega h \, ds.$$

Так как

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{1}{F} \int_0^l \omega h \, ds,$$

то окончательно имеем:

$$\bar{\omega}_0 = \bar{\omega} + ay - bx. \quad (58)$$

Подставляя (58) в выражение секториального статического момента, найдем

$$S_{\omega_0} = \int_0^s \bar{\omega}_0 h ds = S_{\omega} + aS_x - bS_y, \quad (59)$$

где S_x и S_y — статические моменты части контура относительно осей x и y :

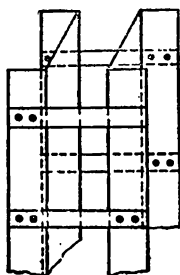
$$S_x = \int_0^s y h ds; \quad S_y = \int_0^s x h ds.$$

Используя (58), получаем для секториального момента инерции выражение

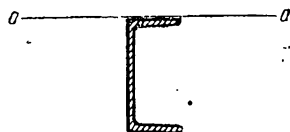
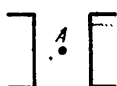
$$I_{\omega_0} = I_{\omega} + a^2 I_x + b^2 I_y, \quad (60)$$

в котором I_{ω} и I_y — главные экваториальные моменты инерции сечения.

На фиг. 34 показан составной стержень. Совместная работа обеих ветвей обеспечивается рядом достаточно часто расположенных планок. Из соображений симметрии ясно, что ось кручения фиксируется прямой,



Фиг. 34.



Фиг. 35.

проходящей через точку A , причем на долю каждой половины стержня приходится половина крутящего момента M ; при расчете закрепление концов каждого участка, расположенного между планками, можно считать не допускающим перемещений ω , поскольку планки образуют вместе со швеллерами замкнутый профиль, обладающий всегда сравнительно большой жесткостью.

Другой пример фиксированной оси кручения дает профиль, прикрепленный к обшивке, достаточно гибкой из своей плоскости (фиг. 35); в этом случае ось кручения должна располагаться на прямой aa .

§ 7. О затухании эффекта стеснения. Приложимость принципа Сен-Венана

Широко используемый в теории упругости принцип Сен-Венана утверждает, что напряжения, вызванные приложением на ограниченной части поверхности упругого тела системы сил, статически эквивалентной нулю, носят местный характер и быстро затухают по мере удаления от места приложения силы.

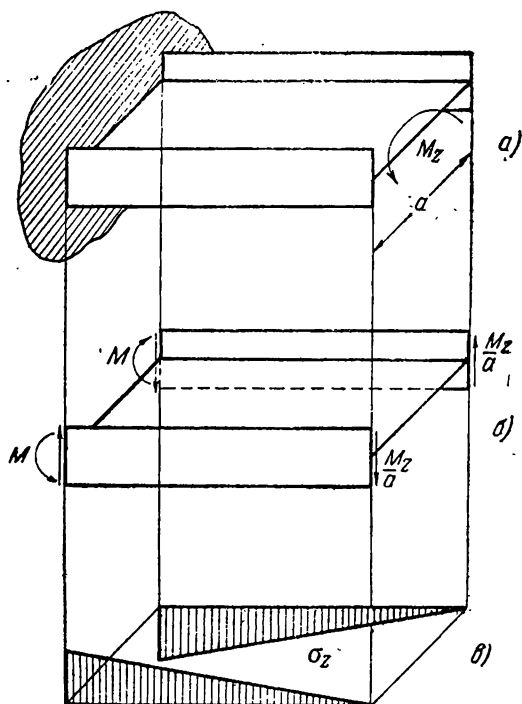
Невозможность применения этого принципа в некоторых задачах теории оболочек была, в связи с безмоментной теорией, отмечена в 1933 г. В. Новодворским [10]. Новодворский указал, что невыполнение принципа Сен-Венана связано со статической необходимостью краевых систем самоуравновешенных напряжений. Иными словами, если такие самоуравновешенные системы краевых усилий определяются из уравнений равновесия (т. е. являются статически необходимыми), то вызванные ими напряжения затухают относительно медленно по мере удаления от края.

Именно этот случай статической необходимости самоуравновешенной системы торцевых нормальных напряжений имеет место, если у тонкостенного стержня с открытым профилем пренебречь сен-венановой жесткостью, т. е. положить $C = 0$.

Для пояснения этого утверждения разберем в качестве примера задачу о кручении консольного стержня двутаврового профиля моментом M_z (фиг. 36, a).

Из фиг. 36, a очевидна необходимость появления изгибающих реактивных моментов $\pm M$ в заделанном сечении (фиг. 36, b). Совокупность этих моментов (бипара) статически эквивалентна нулю; в то же время каждый из моментов $\pm M$ необходим для равновесия соответствующей полки. В этом случае убывание нормальных напряжений σ_z при удалении от заделки идет по линейному закону (фиг. 36, $в$). Действительно, каждая из полок может рассматриваться как консоль,

изгибаемая силой $\frac{M_z}{a}$, так что изгибающие моменты следуют линейному закону (фиг. 36, в). Поэтому нормальные напряжения σ_z убывают также по линейному закону. Касательные



Фиг. 36.

напряжения τ_{xz} должны следовать закону изменения перерезывающей силы, т. е. оставаться постоянными вдоль оси z .

В общепринятом понимании принцип Сен-Венана предполагает экспоненциальный характер затухания напряжений, вызванных нагрузками, статически эквивалентными нулю. С этой точки зрения *линейный характер убывания напряжений нужно рассматривать как нарушение принципа Сен-Венана.*

Линейный характер убывания напряжений σ_z и постоянство напряжения τ_{zs} являются общим свойством тонкостенных стержней с произвольным открытым профилем, находящихся в условиях стесненного кручения, при $C=0$.

Действительно, предельный переход к $C=0$ в формулах (43) и (44) дает для консольного стержня

$$\sigma_z = - \frac{M_\omega(s)}{J_\omega} (L - z), \quad (61)$$

$$\tau_{zs} = - \frac{M}{J_\omega} S_\omega(s), \quad (62)$$

ибо при $C \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$.

На статическую необходимость торцевых бимоментов в общем случае нагружения тонкостенного стержня при $C=0$ было указано еще в гл. I в связи с формулой (27), которая при $C=0$ и отсутствии нагрузки p_z принимает вид:

$$B_\omega(z) = B_\omega(0) + \int_z^0 M_z(z) dz.$$

Из этой формулы видно, что на участках, свободных от распределенной моментной нагрузки, бимомент меняется по линейному закону, так как на этих участках $M_z = \text{const}$. Напомним, что напряжение σ_z изменяется по тому же закону, что и бимомент.

Установленное выше нарушение принципа Сен-Венана несколько смягчается при учете сен-венановой жесткости C .

При изменении толщины профиля жесткость C изменяется пропорционально h^3 , а секториальный момент инерции J_ω — пропорционально h . Тогда параметр $\lambda = \sqrt{\frac{C}{EJ_\omega}}$ изменяется пропорционально h , и поэтому при увеличении толщины стенки стержня возрастает и λ .

Из формул (43) и (44) предыдущего параграфа, относящихся к задаче о кручении консоли, можно получить представление о степени затухания напряжений при наличии сен-венановой жесткости. Нижеприводимые таблицы и графики (фиг. 37 и 38) иллюстрируют ход зависимости σ_z и τ_{zs} от z . Напряжения σ_z и τ_{zs} определяются формулами (27)

и (28), поэтому для суждения о затухании σ_z и τ_{zs} достаточно построить функции [см. (43) и (44)]:

$$-\frac{B_\omega}{M} = \frac{\operatorname{sh} \lambda (L-z)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L}; \quad \frac{M_\omega}{M} = \frac{\operatorname{ch} \lambda (L-z)}{\operatorname{ch} \lambda L}.$$

Из рассмотрения таблиц 6 и 7 и графиков фиг. 37, 38 видно, что с ростом λL затухание постепенно увеличивается

Таблица 6

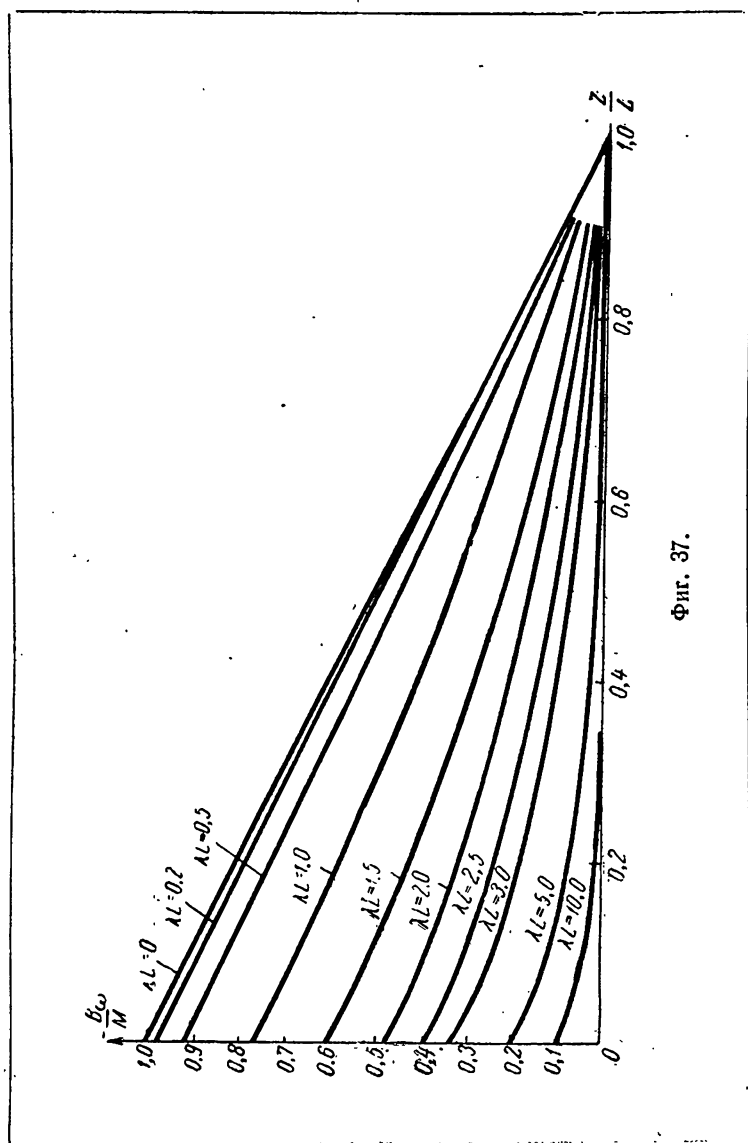
Значения функции $-\frac{B_\omega}{M}$

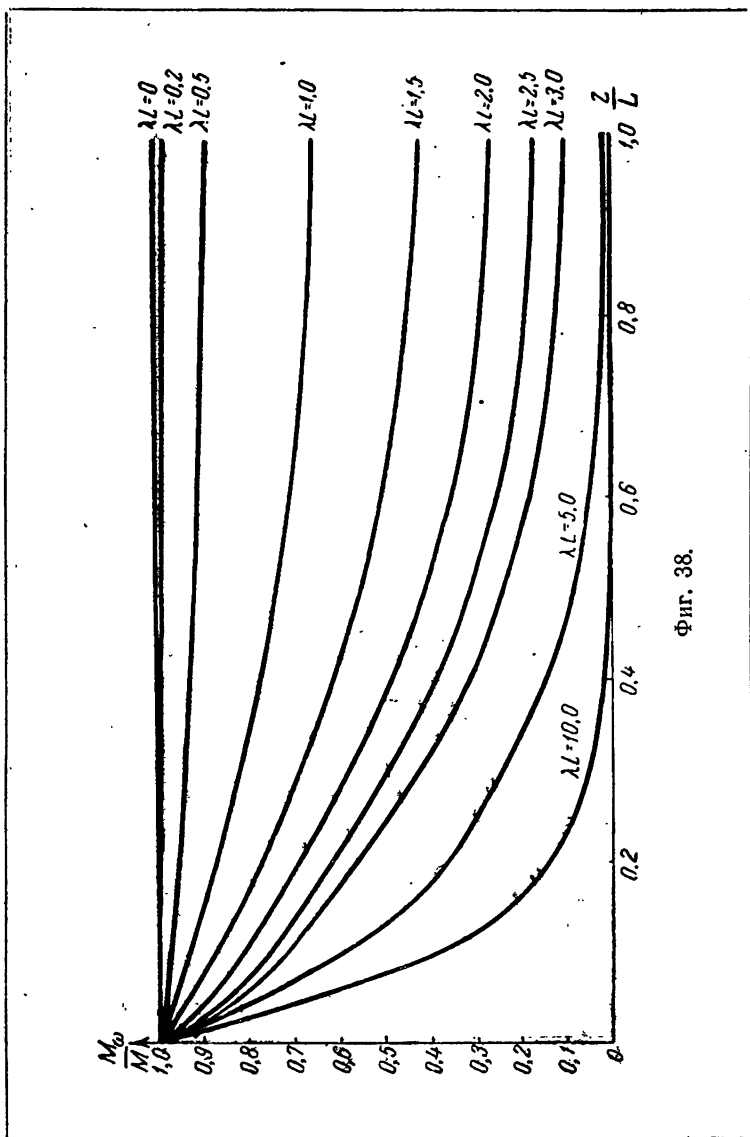
$\lambda L \backslash z/L$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	1,000	0,800	0,600	0,400	0,200	0,000
0,2	0,985	0,783	0,588	0,392	0,196	0,000
0,5	0,924	0,729	0,540	0,357	0,178	0,000
1,0	0,762	0,576	0,412	0,265	0,131	0,000
1,5	0,602	0,426	0,290	0,179	0,086	0,000
2,0	0,480	0,316	0,201	0,117	0,055	0,000
2,5	0,395	0,236	0,140	0,077	0,034	0,000
3,0	0,332	0,181	0,097	0,050	0,021	0,000
5,0	0,200	0,073	0,027	0,010	0,003	0,000

Таблица 7

Значения функции $\frac{M_\omega}{M}$

$\lambda L \backslash z/L$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	0,993	0,988	0,984	0,981	0,980
0,5	1,000	0,958	0,927	0,904	0,891	0,887
1,0	1,000	0,866	0,767	0,700	0,661	0,648
1,5	1,000	0,767	0,607	0,501	0,443	0,424
2,0	1,000	0,685	0,481	0,355	0,287	0,266
2,5	1,000	0,613	0,385	0,252	0,184	0,163
3,0	1,000	0,552	0,309	0,180	0,117	0,099
5,0	1,000	0,369	0,135	0,050	0,020	0,013





Фиг. 38.

и картина распределения напряжений σ_z , τ_{xz} все больше и больше соответствует принципу Сен-Венана.

Для прёкатных профилей при длине, превосходящей высоту в 10 раз, параметр λL колеблется в пределах 4,1—5,6 (для двутавров и швеллеров).

§ 8. Вариационный вывод основных уравнений

Выполненное в предыдущих параграфах построение прикладной теории равновесия тонкостенных стержней с открытым профилем основывалось на выводе уравнений равновесия в перемещениях из уравнений равновесия элемента стержня и деформационных гипотез.

Другой возможный путь развития такой теории состоит в использовании кинематических гипотез для вывода уравнений равновесия в перемещениях и естественных граничных условий к ним из вариационных принципов теории упругости [9].

Особая ценность вариационного метода состоит именно в возможности автоматического получения граничных условий, что важно в прикладных теориях, где часто характер граничных условий не бывает достаточно ясным. Для пояснения этого утверждения достаточно напомнить сделанный Кирхгофом вариационным путем вывод граничных условий на свободном краю тонкой плиты. Физическая интерпретация результата Кирхгофа была дана лишь через некоторое время уже после опубликования его работы.

Заметим еще, что при пользовании энергетическими принципами особенно отчетливо выявляется понятие о второстепенных деформациях. Это те деформации, потенциальной энергией которых можно пренебречь по сравнению с потенциальной энергией главных деформаций.

Обратимся теперь к вариационному выводу основных уравнений теории В. З. Власова.

Для вывода уравнений равновесия в перемещениях будем исходить из принципа возможных перемещений, согласно которому полная потенциальная энергия системы W , равная разности между упругим потенциалом π и работой внешних сил A , должна для действительных перемещений иметь стационарное значение.

Выразим W через перемещения ξ_0 , η_0 , ζ и угол закручивания θ .

Составим выражение для потенциала упругих сил, пользуясь обычной формулой теории оболочек (как известно, эта формула носит приближенный характер — ряд членов порядка h^3 в ней уже опущен):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Em^2}{2(m^2-1)} \int_0^L \int_0^l \left\{ (\varepsilon_z + \varepsilon_s)^2 - \frac{2(m-1)}{m} \left(\varepsilon_z \varepsilon_s - \frac{1}{4} \gamma_{zs}^2 \right) \right\} \times \\ & \times h \, dz \, ds + \frac{Em^2}{24(m^2-1)} \int_0^L \int_0^l \left\{ (x_1 + x_2)^2 - \frac{2(m-1)}{m} \times \right. \\ & \times (x_1 x_2 - x_3^2) \left. \right\} h^3 \, dz \, ds. \end{aligned} \quad (63)$$

При принятых кинематических гипотезах $\varepsilon_s = x_1 = \gamma_{zs} = 0$, и формула (63) значительно упрощается:

$$\Pi = \frac{Em^2}{2(m^2-1)} \int_0^L \int_0^l \left\{ h \varepsilon_z^2 + \frac{h^3}{12} x_2^2 + \frac{h^3(m-1)}{6m} x_3^2 \right\} ds \, dz. \quad (64)$$

Для получения основных уравнений теории В. З. Власова нужно ещё отбросить член, содержащий x_2^2 . Следовательно, из членов третьего относительно h порядка сохраняется только член, соответствующий кручению стержня. Учет остальных, в том числе и невыписанных здесь членов третьего порядка, не представляет особых затруднений; при этом получаются несколько более сложные уравнения, чем те, которые даны В. З. Власовым. Однако практическая ценность подобных расчетов сомнительна, поскольку основные положения теории справедливы лишь для тонкостенных стержней. В случае достаточно тонкостенных стержней нет необходимости и в сохранении члена с x_3^2 , т. е. в учете септановой жесткости. При отбрасывании x_2^2 выражение (64) ещё упрощается и по использованию формул

$$\mu = \frac{Em}{2(m+1)}, \quad C = \mu \int_0^l \frac{h^3(s)}{3} \, ds = \int_0^l dC,$$

которыми определяются модуль сдвига и жесткость профиля на кручение C , принимает вид:

$$\Pi = \frac{Em^2}{2(m^2-1)} \int_0^L \int_0^l e_z^2 h ds dz + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^l \kappa_3^2 dC dz. \quad (65)$$

Так как внешняя нагрузка, действующая на стержень в точке z, s , сводится к силе с составляющими $p_x(z, s)$, $p_y(z, s)$, $p_z(z, s)$ по осям координат x, y, z , то работа внешних сил A будет

$$\begin{aligned} A &= \int_0^L \int_0^l (p_x \xi + p_y \eta + p_z w) dz ds = \\ &= \int_0^L (q_x \xi_0 + q_y \eta_0 + \int_0^l p_z w ds + m_z \vartheta) dz. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь введены суммарные компоненты внешних сил и момента

$$\begin{aligned} q_x &= \int_0^l p_x(z, s) ds; \quad q_y = \int_0^l p_y(z, s) ds, \\ m_z &= \int_0^l (x p_y - y p_x) ds. \end{aligned}$$

Из формул (65) и (66) следует окончательное выражение для полной потенциальной энергии тонкостенного стержня:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Em^2}{2(m^2-1)} \int_0^L \int_0^l e_z^2 h ds dz + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^l \kappa_3^2 dC dz - \\ &- \int_0^L \left\{ q_x \xi_0 + q_y \eta_0 + \int_0^l p_z w ds + m_z \vartheta \right\} dz. \end{aligned} \quad (67)$$

Подставляя в (67) значения e_z и κ_3 из формул первого параграфа настоящей главы, получаем искомое выражение полной потенциальной энергии W через перемещения $\zeta, \xi_0, \eta_0, \vartheta$.

Если за оси x и y выбрать главные центральные оси инерции поперечного сечения и, кроме того, введя главную

секториальную площадь, подобрать ее полюс таким образом, чтобы

$$\int_0^l \omega x h ds = 0; \quad \int_0^l \omega y h ds = 0,$$

то

$$\begin{aligned} W = & \frac{Em^2}{2(m^2-1)} \int_0^L \int_0^l (\zeta^2 + \xi_0^2 x^2 + \eta_0^2 y^2 + \vartheta^2 \omega^2) h ds dz + \\ & + \frac{C}{2} \int_0^L \vartheta^2 dz - \int_0^L \left\{ q_x \xi_0 + q_y \eta_0 + q_z \zeta - \xi_0 \int_0^l x p_z ds - \right. \\ & \left. - \eta_0 \int_0^l y p_z ds - \vartheta \int_0^l \omega p_z ds + m_z \vartheta \right\} dz. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия в перемещениях и граничные условия к ним могут быть получены преобразованием вариации полной потенциальной энергии с помощью формулы для интегрирования по частям. Однако удобнее прямо воспользоваться уравнениями Эйлера—Лагранжа и формулами для естественных граничных условий, которые в случае изучаемого нами функционала

$$W = \int_0^L F(\zeta, \dot{\zeta}, \xi_0, \dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0, \eta_0, \dot{\eta}_0, \ddot{\eta}_0, \vartheta, \dot{\vartheta}, \ddot{\vartheta}) dz$$

имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\zeta}} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_0} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_0} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{\xi}_0} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\vartheta}} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{\vartheta}} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_0} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_0} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{\eta}_0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

и при $z=0$ и $z=L$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_0} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_0} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \eta_0} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_0} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{\vartheta}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Подставляя в (68) найденное ранее выражение для $F(\zeta, \dot{\zeta}, \xi_0, \dot{\xi}_0, \eta_0, \dot{\eta}_0, \ddot{\eta}_0, \vartheta, \dot{\vartheta}, \ddot{\vartheta})$, получаем искомые уравнения равновесия в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}\ddot{\zeta} \int_0^l h ds + q_z &= 0; \\ \bar{E}\ddot{\xi}_0 \int_0^l x^2 h ds - \int_0^l x \frac{\partial p_z}{\partial z} ds - q_x &= 0; \\ \bar{E}\ddot{\eta}_0 \int_0^l y^2 h ds - \int_0^l y \frac{\partial p_z}{\partial z} ds - q_y &= 0; \\ \bar{E}\ddot{\vartheta} \int_0^l \omega^2 h ds - C\ddot{\vartheta} - \int_0^l \omega \frac{\partial p_z}{\partial z} ds - m_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Эта система четырех дифференциальных уравнений в полных производных с четырьмя неизвестными функциями $\zeta, \xi_0, \eta_0, \vartheta$ была нами уже выведена в гл. I; там, правда, она была выписана в произвольной координатной системе.

Общий интеграл системы (70) должен содержать четырнадцать произвольных постоянных интегрирования, которые определяются из граничных условий (69), имеющих в развернутой форме вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}\dot{\zeta}_0 \int_0^l h ds &= 0; \quad \bar{E}\ddot{\xi}_0 \int_0^l x^2 h ds = 0; \\ \bar{E}\ddot{\xi}_0 \int_0^l x^2 h ds - \int_0^l x p_z ds &= 0; \quad \bar{E}\ddot{\eta}_0 \int_0^l y^2 h ds = 0; \\ \bar{E}\ddot{\eta}_0 \int_0^l y^2 h ds - \int_0^l y p_z ds &= 0; \quad \bar{E}\ddot{\vartheta} \int_0^l \omega^2 h ds = 0; \\ C\dot{\vartheta} - \bar{E}\ddot{\vartheta} \int_0^l \omega^2 h ds + \int_0^l \omega p_z ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Граничные условия выписаны для случая стержня, имеющего свободные от внешних нагрузок торцы. Не представляет затруднений обобщение граничных условий на случай, когда к концу стержня приложены: растягивающая сила Q_z , перерезывающие силы Q_x и Q_y , изгибающие моменты M_x и M_y , крутящий момент M_z и бимомент B_ω .

При приложении на торце $z = L$ указанных обобщенных сил к вариации полной потенциальной энергии добавляются члены, соответствующие работе сил Q_x , Q_y , Q_z на перемещениях $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, δw_0 , моментов M_x , M_y , M_z на вариациях $\delta\eta_0$, $\delta\xi_0$, $\delta\vartheta$ и бимомента B_ω на вариации $-\delta\vartheta$:

$$\delta W_L = -[Q_x \delta\xi_0 + Q_y \delta\eta_0 + Q_z \delta w_0 - M_x \delta\eta_0 + M_y \delta\xi_0 + \\ + M_z \delta\vartheta - B_\omega \delta\vartheta]$$

или

$$\delta W_L = -[Q_x \delta\xi_0 + Q_y \delta\eta_0 + Q_z \delta w_0 + M_y \delta\xi_0 - M_x \delta\eta_0 + \\ + M_z \delta\vartheta - B_\omega \delta\vartheta]. \quad (72)$$

Наличие подобного члена в δW приводит к появлению в правых частях граничных условий (71) величин Q_z , M_x , $-M_y$, Q_y , M_z , $-B_\omega$.

Из уравнений (67) и (72) следуют формулы, определяющие упругие усилия и моменты не только на концах стержня, но и в любом сечении z , если вместо значений функций и их производных при $z = L$ брать их значения в точке z :

$$Q_z = \bar{E}\xi_0'' \int_0^l h ds; \quad Q_x = -\bar{E}\xi_0'' \int_0^l x^2 h ds + \int_0^l x p_x ds;$$

$$Q_y = -\bar{E}\eta_0'' \int_0^l y^2 h ds + \int_0^l y p_y ds;$$

$$M_x = -\bar{E}\eta_0'' \int_0^l y^2 h ds; \quad M_y = \bar{E}\xi_0'' \int_0^l x^2 h ds;$$

$$M_z = C\dot{\vartheta} - \bar{E}\ddot{\vartheta} \int_0^l \omega^2 h \, ds + \int_0^l \omega p_z \, ds;$$

$$B_\omega = -\bar{E}\ddot{\vartheta} \int_0^l \omega^2 h \, ds.$$

Вышеприведенные расчеты показывают, что на свободном конце стержня все обобщенные силы, в том числе и бимомент, должны обращаться в нуль. Столь же просто можно получить и иные силовые граничные условия.

ГЛАВА III

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С ЗАКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ

§ 1. Основные уравнения

Прикладная теория равновесия упругих тонкостенных стержней с закрытым профилем была развита в 1939—40 гг. А. А. Уманским. Основой этой теории служит допущение о возможности построения перемещения w в задаче о стесненном кручении, исходя из формулы, определяющей w в задаче о свободном кручении; при этом переходе от решения простой задачи к решению более сложной сохраняется вид зависимости перемещения w от координаты s .

Задачи об изгибе и растяжении тонкостенных стержней с закрытым профилем в рамках рассматриваемой теории в соответствии с основными кинематическими гипотезами приводят к результатам, совпадающим с формулами теории сопротивления материалов. Поэтому мы ограничимся ниже только задачами о стесненном кручении*.

Прежде чем переходить к изложению теории А. А. Уманского, рассмотрим задачу о свободном кручении тонкостенного стержня с закрытым профилем. В этой задаче соответственно классическому решению Сен-Венана нормальные напряжения в поперечных сечениях σ_z отсутствуют, так что из формулы (25) гл. I следует, что касательное усилие $S = \tau_{zs}h$ может являться функцией только координаты z (конечно, входящая в (25) нагрузка p_z , соответственно условиям задачи о свободном кручении, считается отсутствующей).

* Так же, как и в теории В. З. Власова, особые случаи изгиба (изгиб бипарами) могут быть рассмотрены с помощью решения задачи о стесненном кручении.

Как уже было указано, в случаях стержней с закрытыми профилями, крутящий момент \bar{M}_z , возникающий от неравномерности распределения τ_{zs} по толщине стенки, может считаться отсутствующим*.

Тогда интегральное уравнение (24) гл. I принимает вид

$$\int_0^l S r ds = M_z. \quad (1)$$

Так как величина касательного усилия $S = \tau_{zs} h$ не зависит от координаты s , то

$$S = \frac{M_z}{\Omega}, \quad (2)$$

где Ω — удвоенная величина полной площади, заключенной внутри срединной линии поперечного сечения.

В задаче о свободном кручении \bar{M}_z не меняется по длине стержня; поэтому касательные напряжения

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{\Omega h} \quad (3)$$

также не меняются по длине стержня.

Перейдем теперь к определению перемещения w . Вследствие неизменяемости контура, действительно имеющей место в случае свободного кручения, перемещение по касательной к срединной линии u определяется обычной формулой кинематики:

$$u = r(s) \vartheta(z), \quad (4)$$

где попрежнему $r(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к срединной линии; $\vartheta(z)$ — угол поворота сечения $z = \text{const}$.

Подставляя (4) в выражение, определяющее сдвиг

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zs} = \frac{\tau_{zs}}{\mu},$$

* Это предположение не трудно понять, если вспомнить мембранную аналогию задачи о кручении тонкостенного стержня с закрытым профилем.

получим

$$\frac{\partial w}{\partial s} + r\dot{\vartheta} = \frac{M}{\mu\Omega h}. \quad (5)$$

Интегрируя (5) по дуге s , имеем

$$w = \frac{M}{\mu\Omega} \int_0^s \frac{ds}{h} - \dot{\vartheta} \int_0^s r ds + w_0, \quad (6)$$

где w_0 — перемещение точек той образующей, от которой ведется отсчет дуги s . В задаче о чистом кручении $w_0 = \text{const.}$

После обхода вдоль всей срединной линии перемещение w должно вернуться к начальному значению w_0 , поэтому

$$\frac{M}{\mu\Omega} \oint \frac{ds}{h} - \dot{\vartheta}\Omega = 0.$$

Отсюда получаем известный результат, свидетельствующий о постоянстве $\dot{\vartheta}$ в рассматриваемой задаче

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{M}{\mu\Omega^2} \oint \frac{ds}{h} \\ M &= \frac{\mu\Omega^2}{\oint \frac{ds}{h}} \dot{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

или

Подставляя (7) в (6), найдем

$$w = -\dot{\vartheta}(\omega - \Omega \bar{s}) + w_0, \quad (8)$$

где введена приведенная относительная длина дуги

$$\bar{s} = \int_0^s \frac{ds}{h} : \oint \frac{ds}{h}, \quad (9)$$

имеющая значение нуль при $s=0$ и обращающаяся в единицу после обхода всего контура при $s=l$.

Примем, следуя А. А. Уманскому, что при переходе к задаче о кручении стержня, в общем случае нагружения крутящими парами при произвольных условиях на торцах,

зависимость перемещения w от координаты s сохраняется, при одновременном „расслаблении“ зависимости от координаты z — на место чисел β и w_0 становятся пока неизвестные функции координаты $\beta(z)$ и $w_0(z)$. Тогда вместо (8) имеем

$$w = \beta(z)(\bar{\Omega}s - \omega) + w_0(z), \quad (10)$$

здесь $\beta(z)$ не является углом закручивания на единицу длины, как это было принято А. А. Уманским в первой редакции теории^[18] (впоследствии А. А. Уманский предложил не связывать теорию постулированием геометрического смысла функции $\beta(z)$ [17]).

Используя (10), находим нормальное напряжение σ_z :

$$\sigma_z = \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z} = -\bar{E} \dot{\beta}(\omega - \bar{\Omega}s) + \bar{E} \dot{w}_0. \quad (11)$$

Интегральные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \oint \sigma_z h ds &= Q_z, \\ \oint \sigma_z x h ds &= -M_y, \\ \oint \sigma_z y h ds &= M_x \end{aligned}$$

[см. формулы (15) § 1, гл. II] в рассматриваемой задаче о кручении принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \oint \sigma_z h ds &= 0, \\ \oint \sigma_z x h ds &= 0, \\ \oint \sigma_z y h ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя в эти условия самоуравновешенности системы напряжений σ_z выражение (11), находим

$$\left. \begin{aligned} -\bar{E} \dot{\beta} \oint (\omega - \bar{\Omega}s) h ds + \bar{E} \dot{w}_0 F &= 0, \\ -\bar{E} \dot{\beta} \oint (\omega - \bar{\Omega}s) x h ds + \bar{E} \dot{w}_0 \oint x h ds &= 0, \\ -\bar{E} \dot{\beta} \oint (\omega - \bar{\Omega}s) y h ds + \bar{E} \dot{w}_0 \oint y h ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Принимая, что оси x и y являются главными центральными осями инерции поперечного сечения стержня, имеем из (13):

$$\dot{\omega}_0 = \frac{1}{F} \oint (\omega - \Omega \bar{s}) h ds, \quad (14)$$

$$\oint (\omega - \Omega \bar{s}) x h ds = 0, \quad (15)$$

$$\oint (\omega - \Omega \bar{s}) y h ds = 0. \quad (16)$$

Подставляя (14) в (11), находим для нормального напряжения σ_z выражение

$$\sigma_z = -E \dot{\beta} \left[\omega - \Omega \bar{s} - \frac{1}{F} \oint (\omega - \Omega \bar{s}) h ds \right]. \quad (17)$$

Назовем выражение, стоящее в правой части формулы (17), *обобщенной главной секториальной площадью*:

$$\bar{\omega} = \omega - \Omega \bar{s} - \frac{1}{F} \oint (\omega - \Omega \bar{s}) h ds. \quad (18)$$

Обобщенная главная секториальная площадь $\bar{\omega}$ не зависит от начала отсчета дуг; действительно, перенос начала отсчета заменяет величины ω и \bar{s} на постоянные ω_a и \bar{s}_a , так что правая часть соотношения (18) приобретает вид:

$$(\omega + \omega_a) - \Omega (\bar{s} + \bar{s}_a) - \frac{1}{F} \oint [(\omega + \omega_a) - \Omega (\bar{s} + \bar{s}_a)] h ds.$$

Нетрудно убедиться, что это выражение тождественно равно правой части формулы (18) при любых значениях ω_a и \bar{s}_a .

Тогда выражение (17) принимает вид:

$$\sigma_z = -E \dot{\beta} \bar{\omega}, \quad (19)$$

и формально совпадает с аналогичной формулой (14) прикладной теории кручения стержней с открытым профилем.

Введение обобщенной главной секториальной площади $\bar{\omega}$ приводит выражения (15) и (16) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \oint \bar{\omega} x h ds &= 0, \\ \oint \bar{\omega} y h ds &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

формально совпадающему с видом аналогичных выражений (6) гл. II.

Как и в гл. II, выражения (20) представляют собой условия, определяющие положение центра кручения; формулы, определяющие координаты центра кручения, будут выведены на основании (20) в § 3.

Обратимся теперь к определению касательных напряжений; из уравнения (25) гл. I смешанной системы:

$$h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{zs} h)}{\partial s} = 0;$$

после подстановки (19) и интегрирования по дуге s следует:

$$\tau_{zs} h = E \ddot{\beta} \int_0^s \bar{\omega} h ds + (\tau_{zs} h)_0, \quad (21)$$

где $(\tau_{zs} h)_0$ представляет собой неизвестную функцию z , выражающую величину касательного усилия S в точках образующей $s=0$. Для определения $(\tau_{zs} h)_0$ используем последнее интегральное уравнение равновесия части стержня

$$\oint \tau_{zs} r h ds = M_z(z), \quad (22)$$

выведенное в гл. I.

Подставляя в (22) выражение касательного усилия (21), имеем:

$$E \ddot{\beta} \oint r \left[\int_0^s \bar{\omega} h ds \right] ds + (\tau_{zs} h)_0 \oint r ds = M_z.$$

Отсюда находим неизвестное касательное усилие $(\tau_{zs} h)_0$:

$$(\tau_{zs} h)_0 = - \frac{E \ddot{\beta}}{\Omega} \oint r \left[\int_0^s \bar{\omega} h ds \right] ds + \frac{M_z}{\Omega}. \quad (23)$$

Тогда (21) принимает вид:

$$\tau_{zs} h = E \ddot{\beta} \bar{S}_{\omega}(s) + \frac{M_z}{\Omega}, \quad (24)$$

где введен *обобщенный секториальный статический момент* \bar{S}_ω .

$$\bar{S}_\omega = \int_0^s \bar{\omega} h ds - \frac{1}{\Omega} \oint r \left[\int_0^s \bar{\omega} h ds \right] ds. \quad (25)$$

Легко показать, что величина \bar{S}_ω , так же как и обобщенные секториальные площади $\bar{\omega}$, не зависит от выбора начала отсчета дуг.

Очевидно, что в формуле (24) последний член $\frac{M_z}{\Omega}$ отвечает задаче о свободном кручении и во всех случаях выражает совокупность касательных напряжений, статически эквивалентную полному крутящему моменту M_z в сечении; отсюда следует, что выражение $\bar{E}\ddot{\beta}\bar{S}_\omega(s)$ представляет самоуравновешенную систему касательных напряжений. Действительно, момент этой системы напряжений равен нулю:

$$\bar{E}\ddot{\beta} \oint \bar{S}_\omega(s) r ds = 0, \quad (25a)$$

в чем легко убедиться подстановкой в (25a) выражения (25).

Таким образом, исчерпав все уравнения равновесия, мы сумели выразить перемещение w и напряжения σ_z , τ_{zs} через оставшуюся неопределенной функцию $\beta(z)$. *Нахождение этой функции $\beta(z)$ из уравнений статики невозможно*, — они удовлетворены при произвольном значении функции $\beta(z)$.

Сказанное является выражением статической неопределимости задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня с закрытым профилем и по существу вытекает из отсутствия граничного условия для функции $(\tau_{zs}h)_0$. В данном случае это условие не может быть заменено условием периодичности, так как последнее при сохранении заимствованной зависимости перемещения w от дуги s удовлетворяется тождественно; в этом можно убедиться при обходе всего контура в выражении (21).

Заметим, что в приведенном изложении принципиально ничто не изменится, если за основную лишнюю функцию выбрать вместо $\beta(z)$ величину $S_0(z) = (\tau_{zs}h)_0$; такой путь развития теории был принят ее автором во второй редакции [14].

Невозможность определения β из уравнений статики заставляет обратиться к условиям совместности деформаций в той или иной редакции. Мы полагаем, что единственно правильный путь раскрытия неопределенности состоит в обращении к вариационным принципам теории упругости. Подобный путь был использован в более общей задаче о конической оболочке Л. И. Балабухом [2] в 1947 г.

§ 2. Вариационное уравнение задачи

При принятых в предыдущем параграфе кинематических гипотезах потенциальная энергия рассматриваемого стержня выражается через напряжения σ_z и τ_{zs} формулой:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \oint h \left(\frac{\sigma_z^2}{E} + \frac{\tau_{zs}^2}{\mu} \right) ds dz. \quad (26)$$

В отличие от § 8 гл. II, здесь записана потенциальная энергия деформации стержня, а не полная потенциальная энергия его, о которой там шла речь; дело в том, что мы намерены в дальнейшем воспользоваться теоремой Кастильяно, допускающей такие вариации напряженного состояния, которые не нарушают выполнения уравнений статики. Именно поэтому в предыдущем параграфе мы позаботились об удовлетворении всех уравнений статики.

Поэтому, варьируя функцию β , мы получаем такие вариации напряженного состояния, которые всегда статически удовлетворительны и следовательно допустимы при пользовании теоремой Кастильяно.

Выражая потенциальную энергию стержня (26) через производные $\dot{\beta}$ и $\ddot{\beta}$ с помощью формул для напряжений (19) и (24), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L R(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, z) dz, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} R(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, z) = & \bar{E} \dot{\beta}^2 \oint \bar{\omega}^2 h ds + \frac{\bar{E}^2}{\mu} \ddot{\beta}^2 \oint \bar{S}_{\omega}^2 \frac{ds}{h} + \\ & + \frac{2\bar{E}M}{\mu\Omega} \dot{\beta} \oint \bar{S}_{\omega} \frac{ds}{h} + \frac{M^2}{\mu\Omega^2} \oint \frac{ds}{h}. \end{aligned} \quad (28)$$

Согласно теореме Кастильяно, действительно осуществляющееся напряженное состояние отличается от множества всех статически допустимых состояний тем, что для него потенциальная энергия системы принимает минимальное значение. Поэтому функция $\beta(z)$ должна быть такой, чтобы потенциальная энергия $\Pi(\beta)$ была минимальна.

Составляя уравнение Эйлера — Лагранжа для рассматриваемого стержня при выборе производной $\dot{\beta}$ за неизвестную функцию:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial R}{\partial \ddot{\beta}} \right) = 0,$$

имеем основное дифференциальное уравнение задачи:

$$\bar{E} D \ddot{\beta} - C \dot{\beta} = -m; \quad (29)$$

здесь $m = \dot{M}$ — погонный крутящий момент,

$$D = \frac{\oint \bar{S}_\omega^3 \frac{ds}{h}}{\oint \bar{S}_\omega \frac{ds}{h}}, \quad (30)$$

$$C = \frac{\mu \oint \frac{ds}{h}}{\oint \frac{ds}{h}}. \quad (31)$$

Последняя формула естественно совпадает с ранее данной формулой жесткости при свободном кручении.

Решение уравнения (29) для производной $\dot{\beta}(z)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & A_1 \operatorname{sh} \lambda z + A_2 \operatorname{ch} \lambda z - \\ & - \frac{1}{\lambda \bar{E} D} \int_0^z m(z_1) \operatorname{sh} \lambda (z - z_1) dz_1, \end{aligned} \quad (32)$$

где, подобно формуле (23) гл. II,

$$\lambda = \sqrt{\frac{C}{\bar{E} D}}. \quad (33)$$

Граничные условия для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 имеют в основных случаях закрепления торцов следующий вид:

1. Если торец свободен от нормальных напряжений, то согласно (19):

$$\dot{\beta} = 0. \quad (34)$$

2. Если в точках торца $z = L$ не допускаются перемещения w , то необходимо воспользоваться естественным граничным условием, получаемым из принципа Кастильяно:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} \right)_{z=L} = 0;$$

в нашей задаче оно даст:

$$\ddot{\beta} = -\frac{M}{ED}. \quad (35)$$

Приведенных граничных условий достаточно для нахождения постоянных A_1 и A_2 , входящих в решение (32).

Зная $\dot{\beta}$, мы можем определить и напряжения σ_z и τ_{zs} по формулам:

$$\sigma_z = -\bar{E}\bar{\omega}\dot{\beta}, \quad (36)$$

$$\tau_{zs}h = \bar{E}\dot{\beta}\bar{S}_{\omega} + \frac{M}{\Omega}, \quad (37)$$

которые при формальном введении бимоента

$$B_{\omega} = -\bar{E}\dot{\beta} \oint \bar{\omega}^2 h ds \quad (38)$$

и изгибно-крутящего момента

$$M_{\omega} = -\bar{E}\dot{\beta} \oint \bar{\omega}^2 h ds \quad (39)$$

принимают вид:

$$\sigma_z = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}}, \quad (40)$$

$$\tau_{zs}h = \frac{-M_{\omega}\bar{S}_{\omega}}{I_{\omega}} + \frac{M}{\Omega}, \quad (41)$$

где I_{ω} обозначает обобщенный секториальный момент инерции сечения

$$I_{\omega} = \oint \bar{\omega}^2 h ds. \quad (42)$$

Для выяснения физического смысла величины B_ω умножим обе части формулы (36) на $\bar{\omega} h ds$ и проинтегрируем полученное равенство по всей срединной линии сечения:

$$\oint \sigma_z h \bar{\omega} ds = -\bar{E} I_\omega \ddot{\beta}. \quad (43)$$

Выражение (43) по своей структуре совпадает с формулой (22) предыдущей главы и определяет B_ω как момент элементарных усилий $\sigma_z h ds$ при „плече“ $\bar{\omega}$.

Из (38) и (39) видна связь между бимоментом B_ω и изгибно-крутящим моментом M_ω :

$$M_\omega = \dot{B}_\omega. \quad (44)$$

Вид формул (40) и (41) показывает, что для вычисления напряжений σ_z и τ_{zs} по этим формулам удобнее располагать дифференциальным уравнением для функции B_ω , а не β .

Исключая из (29) с помощью (38) производные $\dot{\beta}$ и $\ddot{\beta}$, имеем:

$$\ddot{B}_\omega - \lambda^2 B_\omega = m \frac{I_\omega}{D}. \quad (45)$$

Из (35) и (34) получаем граничные условия для уравнения (45):

$$1. \text{ Свободный торец } B_\omega = 0. \quad (46)$$

$$2. \text{ Заделанный торец } \dot{B}_\omega = M \frac{I_\omega}{D}. \quad (47)$$

Знание функции $\dot{\beta}$ или B_ω дает возможность определения только напряжений σ_z и τ_{zs} . Для нахождения перемещения w , согласно (10), необходимо определить $\beta(z)$. Интегрируя (32), имеем:

$$\begin{aligned} \beta = A_0 + \frac{A_1}{\lambda} \operatorname{ch} \lambda z + \frac{A_2}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda z - \\ - \frac{1}{C} \int_0^z m(z_1) [\operatorname{ch} \lambda (z - z_1) - 1] dz_1. \end{aligned} \quad (48)$$

В этом выражении постоянные A_1 и A_2 известны, так что надлежит добавить еще одно граничное условие для вели-

чины β на одном из концов стержня. Такое граничное условие может быть сформулировано лишь с помощью выражения (10) для перемещения w , которое при учете формулы (14) принимает вид:

$$w = -\beta(z)\bar{\omega} + c, \quad (49)$$

где c — произвольная постоянная, соответствующая жесткому смещению вдоль оси z ; она может быть опущена без ограничения общности.

Из формулы (49) видно, что на заделанном торце

$$\beta = 0; \quad (50)$$

это условие позволяет найти A_0 . Совмещая начало координат с заделанным торцом, имеем:

$$A_0 = -\frac{A_1}{\lambda}. \quad (51)$$

Определение угла поворота сечения $\vartheta(z)$ может быть осуществлено на основании теоремы Кастильяно. Рассматривая угол закручивания $\vartheta(z)$ как обобщенную координату, соответствующую фиктивному крутящему моменту M^0 , приложенному в сечении $z = \text{const}$, получаем:

$$\vartheta = \frac{\partial \Pi}{\partial M^0} \Big|_{M^0=0}. \quad (52)$$

§ 3. Приближенное уравнение задачи

При развитии своей теории А. А. Уманский основывался не на вариационных принципах, а на некоторых дополнительных соображениях, которые позволили ему составить дифференциальное уравнение задачи.

В первоначальном варианте теории [16] А. А. Уманский предположил, что функция β совпадает с углом закручивания на единицу длины $\dot{\vartheta}$:

$$\beta = \dot{\vartheta}. \quad (53)$$

При использовании этого предположения дальнейший план развития теории в основных чертах состоит в следующем.

Задавшись выражением (1), находят формулы, определяющие напряжения:

$$\sigma_z = -\bar{E} \ddot{\vartheta} \bar{\omega}, \quad (54)$$

$$\tau_{zs} = \frac{E \bar{S}_\omega}{h} \ddot{\vartheta} + \frac{M}{\Omega h}. \quad (55)$$

Эти формулы аналогичны соотношениям (19) и (24). Затем делается попытка согласования касательных напряжений τ_{zs} с величинами сдвигов срединной поверхности, для чего используется соотношение:

$$\frac{\partial w_1}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{zs}}{\mu} = \frac{E \bar{S}_\omega}{\mu h} \ddot{\vartheta} + \frac{M}{\mu \Omega h},$$

как уравнение для определения нового выражения w_1 :

$$w_1 = \frac{E \ddot{\vartheta}}{\mu} \int_0^s \bar{S}_\omega \frac{ds}{h} + \frac{M}{\mu \Omega} \int_0^s \frac{ds}{h} - \dot{\vartheta} \int_0^s r ds + w_0(z). \quad (56)$$

Здесь производная $\frac{\partial u}{\partial z}$ выражена через угол закручивания:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = r \dot{\vartheta}, \quad (57)$$

и $w_0 = w_0(z)$ есть произвольная функция z .

Разумеется, что выражение (56) не совпадает с исходным выражением (1). Требование периодичности перемещения w_1 приводит к уравнению:

$$E \ddot{\vartheta} \oint \bar{S}_\omega \frac{ds}{h} + \frac{M}{\Omega} \oint \frac{ds}{h} - \mu \dot{\vartheta} \Omega = 0,$$

или после дифференцирования по z :

$$\bar{E} I_\omega \ddot{\vartheta} - C \dot{\vartheta} = -m. \quad (58)$$

Это уравнение с точностью до коэффициента при старшей производной совпадает с полученным выше уравнением (29).

Основным недостатком такой схемы построения теории является дополнительное утверждение о совпадении функции $\beta(z)$ с углом закручивания на единицу длины.

Вскоре после опубликования этой теории А. А. Уманский отметил значительность возможной ошибки для таких стержней, сечения которых мало искажаются (из плоскости) в условиях свободного кручения. В табл. 8 приведены результаты деления нормальных напряжений в угловых точках заделки тонкостенного консольного стержня прямоугольного сечения, даваемых только что изложенной теорией А. А. Уманского, на напряжения, определяемые по теории, развитой в § 2 настоящей главы.

Таблица 8

Отношение сторон сечения	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Отношение напряжений σ_z по обеим теориям	23,0	12,1	6,6	4,8	3,9	3,4

Отношение сторон сечения	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0	∞
Отношение напряжений σ_z по обеим теориям	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4	1,34

Аналогичное отношение для поправок к величине $\frac{M}{Q}$ в выражении τ_{zs} приведено в табл. 9.

Таблица 9

Отношение сторон сечения	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Отношение поправок по двум теориям	529	146	43,8	23,2	15,3	11,4

Продолжение табл. 9

Отношение сторон сечения	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0	∞
Отношение поправок по двум теориям	5,4	3,9	3,0	2,4	2,0	1,80

Значительно лучшие результаты дает второй вариант теории, предложенный А. А. Уманским в 1940 г. [17].

Сущность этого варианта состоит в следующем. Утверждение (53) отвергается, так что выражения σ_z и τ_{zs} содержат произвольную функцию $\beta(z)$ и имеют уже приведенный в § 2 вид:

$$\sigma_z = -\bar{E}\ddot{\beta}\bar{\omega}, \quad (19)$$

$$\tau_{zs}h = \bar{E}\ddot{\beta}\bar{S}_\omega + \frac{M_z}{\Omega}. \quad (24)$$

Далее, так же как и в первой теории, по напряжению τ_{zs} находится новое выражение для w_1 :

$$w_1 = \frac{\bar{E}\ddot{\beta}}{\mu} \int_0^s \bar{S}_\omega \frac{ds}{h} + \frac{M}{\mu\Omega} \int_0^s \frac{ds}{h} - \vartheta \int_0^s r ds + w_0(z). \quad (59)$$

В отличие от (56) в этом выражении содержатся две функции $\beta(z)$ и $\vartheta(z)$; первая из них появилась из формулы для w , а вторая из соотношения $\frac{\partial u}{\partial z} = r\dot{\vartheta}$.

Требование периодичности перемещения w_1 приводит после дифференцирования по z к уравнению, связывающему функции β и ϑ :

$$\bar{E}I_\omega\ddot{\beta} - C\dot{\vartheta} = -m. \quad (60)$$

Это уравнение отличается от уравнения (58) видом первого члена; совпадение обоих уравнений достигается при $\beta = \dot{\vartheta}$.

Так как для вывода соотношения (60) использованы не только все уравнения равновесия, но и дополнительное деформационное условие замкнутости контура, то теперь необходимо сформулировать еще одно дополнительное условие, так как для нахождения двух функций ϑ и β имеется всего одно уравнение.

Таким дополнительным условием служат вторично записанное интегральное уравнение равновесия

$$\mu \oint \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) r h ds = M_z, \quad (61)$$

в котором касательные напряжения выражены через сдвиги срединной поверхности, вычисляемые согласно первоначальному выражению w :

$$\tau'_{zs} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (62)$$

Штрих при τ'_{zs} должен напомнить о различии τ'_{zs} от τ_{zs} [см. формулу (24)].

Так как

$$w = -\beta \bar{\omega} \quad \text{и} \quad u = r \vartheta,$$

то

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\beta \left(r - \frac{\Omega}{h \oint \frac{ds}{h}} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = r \dot{\vartheta}. \quad (63)$$

Подставляя (63) в (61), находим

$$-\beta \left[\oint r^2 h ds - \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{h}} \right] + \dot{\vartheta} \oint r^2 h ds = \frac{M_z}{\mu}.$$

Вводя „направленный момент инерции“ I_p :

$$I_p = \oint r^2 h ds \quad (64)$$

и геометрическую жесткость свободного кручения

$$I_d = \frac{C}{\mu} = \Omega^2 : \oint \frac{ds}{h},$$

получаем недостающее уравнение:

$$\beta (I_d - I_p) + I_p \dot{\vartheta} = \frac{M_z}{\mu}, \quad (65)$$

которое вместе с (60) решает вопрос о нахождении функций ϑ и β . Из уравнения (65) имеем

$$\dot{\vartheta} = \frac{M_z}{\mu I_p} + \beta \left(1 - \frac{I_d}{I_p} \right). \quad (66)$$

Подставляя это в (60), получим:

$$\bar{E}I\omega\ddot{\beta} - C_1\beta = -M_z(1 - \frac{I_d}{I}), \quad (67)$$

где, в отличие от (58),

$$C_1 = C(1 - \frac{I_d}{I_p}). \quad (68)$$

Последнее уравнение вместе с граничными условиями позволяет найти $\beta(z)$, а следовательно вычислить и напряжения.

При необходимости определения угла закручивания следует обратиться к выражению (66).

Изложенное решение А. А. Уманского *значительно уточняет первую редакцию теории*. Особенностью этого решения является частично достигнутое соответствие между касательными напряжениями и сдвигами. В сущности здесь пришлось иметь дело с двумя выражениями для касательного напряжения:

1) касательными напряжениями τ_{zs} , вытекающими из условия равновесия элемента стенки и данными формулой (24);

2) касательными напряжениями $\tau'_{zs} = \mu(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z})$, определяемыми из принятой картины деформаций.

В этом решении достигнуто в интегральном смысле соответствие напряжений τ_{zs} и τ'_{zs} :

$$\oint \tau_{zs} rh ds = \oint \tau'_{zs} rh ds = M_z.$$

Далее надлежит заметить, что помимо исходного перемещения w было введено еще перемещение w_1 , найденное по касательному напряжению τ_{zs} . Структура решения позволила удовлетворить условию замкнутости при пользовании обеими зависимостями.

Таким образом, в изложенном решении:

1) касательные напряжения τ'_{zs} , (соответствующие принятому выражению w) отвечают интегральному условию равновесия;

2) перемещения w_1 , вычисленные в соответствии с касательными напряжениями τ_{zs} , отвечают условию замкнутости.

Таблица 10

Отношение сторон сече- ния	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Отношение напряжений σ_z по обем тео- риям	1,10	1,10	1,11	1,12	1,12	1,13
Отношение сторон сече- ния	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0	∞
Отношение напряжений σ_z по обем тео- риям	1,16	1,19	1,22	1,27	1,31	1,34

Таблица 11

Отношение сторон сече- ния	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Отношение поправок к напряжениям τ_{zs} по обем теориям	1,20	1,21	1,22	1,24	1,25	1,27
Отношение сторон сече- ния	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0	∞
Отношение поправок к напряжениям τ_{zs} по обем теориям	1,35	1,41	1,49	1,60	1,70	1,80

В первом варианте теории достигнуто только второе соответствие.

Для оценки точности второго варианта теории А. А. Уманского сопоставим на тех же примерах, что и в случае первого варианта, результаты этой теории с результатами, следующими из вариационного уравнения. Отношения напряжений, вычисленных двумя способами, даны в табл. 10 и 11.

Резкое улучшение точности, достигнутое А. А. Уманским во второй редакции теории, делает ее практически приемлемой. Однако вариационное уравнение, позволяющее извлечь из основной гипотезы (10) наилучший результат из всех возможных, является несомненно наиболее сильным средством завершения теории.

§ 4. Секториальные характеристики

В данные выше зависимости входит обобщенная секториальная площадь $\bar{\omega}(s)$ и обобщенные секториальные характеристики $I_{\bar{\omega}}, S_{\bar{\omega}}(s)$.

При рассмотрении их свойств остановимся прежде всего на определении координат центра кручения в случае замкнутого профиля.

В § 1 настоящей главы были установлены условия, определяющие положение центра кручения:

$$\oint \bar{\omega} x h ds = 0, \quad \oint \bar{\omega} y h ds = 0. \quad (69)$$

Покажем, как из этих уравнений найти координаты центра кручения.

Согласно формуле (31) гл. II:

$$\omega = \omega^* + b_0 x - a_0 y + c. \quad (70)$$

ω^* — секториальная площадь с полюсом в произвольной точке O^* ,

x и y — текущие координаты в системе главных центральных осей;

a_0 и b_0 — координаты полюса секториальной площади ω в системе осей x^*, y^* , проходящих через точку O^* параллельно главным центральным осям;

c — постоянная.

Поэтому формула преобразования обобщенной секториальной площади при переходе от вспомогательного полюса в точке O^* к новому полюсу в точке O будет:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^* + b_0 x - a_0 y + c, \quad (71)$$

где

$$\bar{\omega}^* = \omega^* - \Omega \bar{s} - \frac{1}{F} \oint (\omega^* - \Omega \bar{s}) h ds$$

есть обобщенная секториальная площадь при полюсе в точке O^* .

Подставляя (71) в условия (69) и учитывая, что

$$\oint xyh ds = 0, \quad \oint x^2 h ds = I_y, \quad \oint y^2 h ds = I_x,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \oint \bar{\omega}^* x h ds + b_0 I_y &= 0, \\ \oint \bar{\omega}^* y h ds - a_0 I_x &= 0, \end{aligned}$$

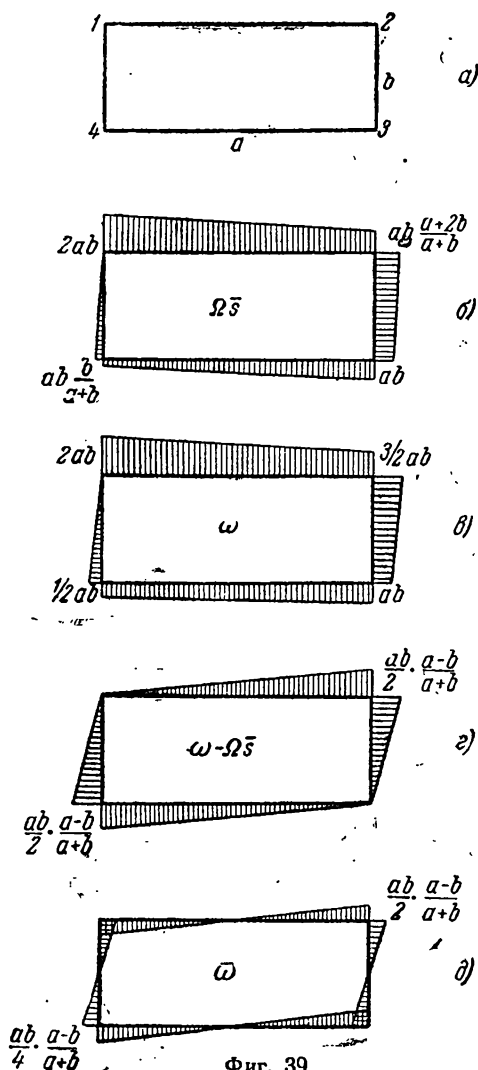
откуда находим искомые координаты центра кручения в системе осей x^* , y^* :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{I_x} \oint \bar{\omega}^* y h ds, \\ b_0 &= -\frac{1}{I_y} \oint \bar{\omega}^* x h ds. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Напомним, что в этих формулах $\bar{\omega}^*$ вычисляется при полюсе в произвольной точке, а x и y являются координатами точек срединной линии в системе главных центральных осей xu .

Определение секториальных характеристик закрытых профилей покажем на простейшем примере прямоугольной коробки (фиг. 39,а) при $h = \text{const}$.

По условиям симметрии очевидно, что центр кручения совпадает с центром тяжести. Принимая начало отсчета дуг в точке I , получаем график зависимости $\Omega \bar{s} = \frac{ab}{a+b} s$ (фиг. 39,б) и график зависимости $\omega(s)$ (фиг. 39,в). На фиг. 39,г показаны разности $\omega - \Omega \bar{s}$.



Площадь эпюры $\omega - \bar{\Omega} s$ равна:

$$\oint (\omega - \bar{\Omega} s) ds = \frac{ab(a-b)}{2}.$$

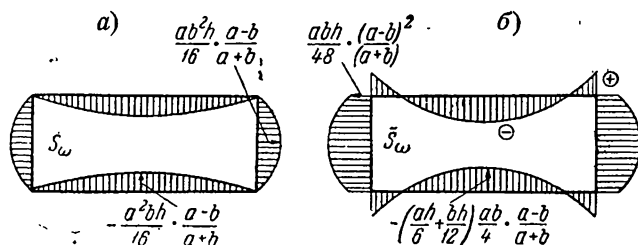
Подставляя это в формулу (18), находим обобщенные главные секториальные площади (см. фиг. 39, д):

$$\bar{\omega} = \omega - \bar{\Omega} s - \frac{ab(a-b)}{4(a+b)}.$$

Как видно, при $a = b$ величина $\bar{\omega} = 0$.

На фиг. 40, а показана эпюра $\bar{S}_{\omega} = \int_0^s \bar{\omega} h ds$ (началом отсчета служит точка 1).

После вычисления $\frac{1}{\Omega} \oint S_{\omega} r ds = \frac{abh(a-b)^2}{48(a+b)}$ находим по формуле (25) значения \bar{S}_{ω} (см. фиг. 40, б).



Фиг. 40.

Далее по (30) находим

$$D = \frac{a^2b^2h(3a^3 + 5a^2b + 5ab^2 + 3b^3)}{40(a+b)^2}$$

и по формуле (31) определяем

$$\frac{C}{\mu} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{h}} = \frac{2a^2b^2h}{a+b}.$$

Полагая $E = 2,6 \mu$, найдем параметр λ для рассматриваемого прямоугольного сечения:

$$\lambda = \frac{1}{a} \sqrt{7,7 \frac{1+\alpha}{3+5\alpha+5\alpha^2+3\alpha^3}},$$

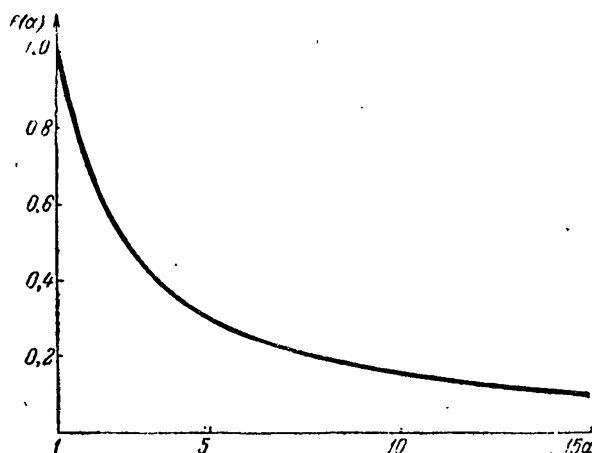
где

$$\alpha = \frac{b}{a}.$$

На фиг. 41 показано изменение параметра

$$\lambda a = \sqrt{7,7 \frac{1+\alpha}{3+5\alpha+5\alpha^2+3\alpha^3}} = f(\alpha)$$

в зависимости от соотношения сторон прямоугольника.



Фиг. 41.

В заключение отметим, что, кроме случая прямоугольника с соотношением сторон $\frac{b}{a} = \alpha = 1$, обобщенная главная секториальная площадь всегда равна нулю, если контур срединной линии поперечного сечения представляет собой описанный многоугольник (при постоянстве толщины стенки).

§ 5. Решение дифференциального уравнения кручения

Сравнивая полученное в § 3 настоящей главы дифференциальное уравнение кручения тонкостенного стержня с замкнутым профилем с дифференциальным уравнением кручения, выведенным в теории открытых профилей, можно установить далеко идущую аналогию между задачами о кручении *открытых и закрытых стержней*.

Эта аналогия становится совершенно ясной из приводимого ниже сопоставления основных формул обеих теорий (см. таблицу на стр. 132).

Существование указанной аналогии, распространяющейся и на граничные условия, избавляет нас от необходимости специального рассмотрения задач о кручении тонкостенного стержня с замкнутым профилем. Все результаты можно получить из формул § 3 гл. II и табл. 1—3 путем замены величин I_ω на D , \oint на β и т. д.

В качестве примера использования подобного приема рассмотрим решение задачи о консольном стержне замкнутого профиля. Решение подобной задачи для стержня с открытым профилем дается формулами (43)—(45) § 3 гл. II:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{M}{I_\omega} \frac{\operatorname{sh} \lambda (z-L)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} \bar{\omega}(s), \\ \tau_{zs} &= -\frac{M}{I_\omega h} \frac{\operatorname{ch} \lambda (z-L)}{\operatorname{ch} \lambda L} S_\omega(s), \\ w &= -\frac{M}{C} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda (L-z)}{\operatorname{ch} \lambda L} \right] \bar{\omega}(s),\end{aligned}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{C}{EI_\omega}.$$

Тогда решение такой же задачи для закрытого профиля будет:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{M}{D} \frac{\operatorname{sh} \lambda (z-L)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda L} \bar{\omega}(s), \\ \tau_{zs} &= \frac{M}{\Omega h} = \frac{M}{Dh} \frac{\operatorname{ch} \lambda (z-L)}{\operatorname{ch} \lambda L} \bar{S}_\omega(s), \\ w &= -\frac{M}{C} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda (L-z)}{\operatorname{ch} \lambda L} \right] \bar{\omega}(s), \quad \text{где} \quad \lambda^2 = \frac{C}{ED}.\end{aligned}$$

Теория открытых стержней	Теория закрытых стержней
$\oint (z)$	$\beta (z)$
$w = - \oint \bar{\omega}$	$w = - \beta \bar{\omega}$
$a_0 = \frac{1}{I_x} \int_0^l \omega^* y h \, ds$	$a_0 = \frac{1}{I_x} \oint \bar{\omega}^* y h \, ds$
$b_0 = - \frac{1}{I_y} \int_0^l \omega^* x h \, ds$	$b_0 = - \frac{1}{I_y} \oint \bar{\omega}^* x h \, ds$
$B = - \bar{E} I_{\omega} \ddot{\oint}$	$B = - \bar{E} I_{\omega} \ddot{\beta}$
$M_{\omega} = - \bar{E} I_{\omega} \ddot{\ddot{\oint}}$	$M_{\omega} = - \bar{E} I_{\omega} \ddot{\ddot{\beta}}$
$\sigma_z = - \bar{E} \ddot{\oint} \bar{\omega}$	$\sigma_z = - \bar{E} \ddot{\beta} \bar{\omega}$
$\tau_{zs} h = E \ddot{\ddot{\oint}} S_{\omega}(s)$	$\tau_{zs} h - \frac{M}{\Omega} = \bar{E} \ddot{\ddot{\beta}} \bar{S}_{\omega}(s)$
$E I_{\omega} \ddot{\ddot{\ddot{\oint}}} - C \ddot{\ddot{\oint}} = - m$	$E D \ddot{\ddot{\ddot{\beta}}} - C \ddot{\ddot{\beta}} = - m$
$\ddot{B} - \lambda^2 B = m$	$\ddot{B} - \lambda^2 B = m \cdot \frac{I_{\omega}}{D}$
$\lambda^2 = \frac{C}{E I_{\omega}}$	$\lambda^2 = \frac{C}{E D}$

Рассмотрим также случай кручения стержня с закрытым профилем двумя торцевыми крутящими моментами при следующих условиях на торцах:

$$\text{при} \quad z = 0 \quad \sigma = 0,$$

$$z = L \quad \sigma = 0.$$

Для определения напряжений этих условий достаточно. Действительно, используя дифференциальное уравнение для бимоментов (44), находим $B_\omega(0) = 0$, $B_\omega(L) = 0$ и учитывая, что вследствие постоянства крутящего момента по всей длине $m = 0$:

$$B_\omega(z) = 0,$$

т. е., что бимомент отсутствует во всех сечениях.

При этом в нуль обращается и изгибно-крутящий момент, так что для напряжений имеем:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zs} = \frac{M_z}{\Omega},$$

что совпадает с формулами, получаемыми из решения задачи Сен-Венана.

Заметим, что с помощью указанной аналогии все результаты § 5 гл. II (неразрезные стержни) и § 6 гл. II (конструктивно заданные оси) легко переносятся и в теорию кручения стержней с закрытым профилем.

В заключение этого параграфа остановимся на причинах, обусловивших возникновение рассматриваемой аналогии.

Указанная аналогия является прямым следствием пренебрежения отличием деформаций сдвига в общем случае нагружения от этих деформаций в задаче о свободном кручении. Действительно, исходная картина деформаций как для стержней с открытым профилем, так и для стержней с закрытым профилем, была в сущности заимствована из решения, соответствующего задаче о свободном кручении.

Успех гипотезы $\gamma_{zs} = 0$ для стержней с открытым профилем вызван именно этим обстоятельством; точно так же для стержней с закрытым профилем естественна гипотеза, выражаемая формулой (10). Поэтому попытка формального распространения гипотезы $\gamma_{zs} = 0$ на случай стержней с

закрытым профилем заранее обречена на неудачу. К сожалению, некоторые утверждения, базирующиеся на гипотезе $\gamma_{zs} = 0$ для случая закрытых профилей, проникли в справочную литературу (см. [11], стр. 298).

§ 6. О затухании эффекта стеснения

В § 7 гл. II при обсуждении вопроса о затухании нормальных напряжений, соответствующих стесненному кручению тонкостенных стержней с открытым профилем, были отмечены такие задачи, в которых указанная система напряжений статически необходима и в связи с этим затухает весьма медленно. Этим задачам соответствует пренебрежение жесткостью свободного кручения ($C = 0$).

Там же было рассмотрено влияние изменения жесткости свободного кручения на затухание и выяснено, что с ростом жесткости C затухание усиливается (см. графики на фиг. 37 и 38).

Возвращаясь теперь к задаче о стесненном кручении стержней с закрытым профилем, отметим прежде всего, что *система напряжений σ_z и τ_{zs} — $\frac{M_z}{\Omega}$ не является статически необходимой*; действительно, неизбежность обращения к условиям неразрывности (в форме теоремы Кастильяно) свидетельствует о недостаточности уравнений статики для решения задачи в принятой постановке.

Это позволяет заранее предвидеть, что затухание системы нормальных напряжений при стесненном кручении тонкостенного стержня с закрытым профилем должно быть лучше согласовано с принципом Сен-Венана, нежели в задаче о кручении стержней с открытым профилем.

В этом можно убедиться и другим путем. Обратим внимание на то, что безразмерный параметр

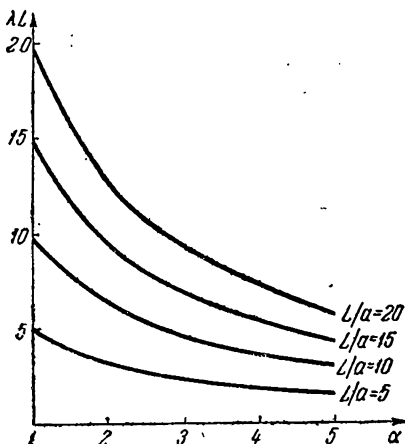
$$\lambda L = \sqrt{\frac{\mu I_\omega}{E \oint \bar{S}_\omega^2 \frac{ds}{h}}} \cdot L \quad (73)$$

имеет нулевой порядок относительно толщины стенки стержня h ; при постоянной толщине стенки h параметр λL вообще от величины h не зависит. Поэтому для задач, относящихся

к стержням с закрытым профилем, не имеет место стремление параметра λL к нулю при уменьшении толщины стенки (в отличие от стержней с открытым профилем, у которых при стремлении h к нулю параметр λL также стремится к нулю).

С другой стороны, серьезные отклонения от принципа Сен-Венана могут наблюдаться лишь при достаточно малых значениях λL , что в рассматриваемых задачах соответствует стержням, сечения которых сильно искажаются в условиях свободного кручения.

Рассмотрим для примера кручение стержня с прямоугольным сечением. Пользуясь графиком, данным на фиг. 41, найдем величины λL в зависимости от отношения сторон сечения $\alpha = \frac{b}{a}$ для различных значений $\frac{L}{a}$ (см. фиг. 42).



Фиг. 42.

В гл. II на фиг. 37, 38 было показано затухание бимоментов и изгибно-крутящих моментов в зависимости от параметра λL для задачи о кручении консоли с открытым профилем.

В силу установленной аналогии, зависимости, показанные на этом графике, сохраняются и в рассматриваемом случае при подстановке значений λL , определяемых по формуле (73).

Как видно из графика, данного на фиг. 42, у вытянутых стержней с сечениями, не сильно отличающимися от квадрата ($\alpha = 1 \div 5$), параметр λL имеет значения, свидетельствующие о достаточно интенсивном затухании.

ГЛАВА IV

УПРОЩЕННЫЕ ТЕОРИИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Возможности применения гипотезы о линейном характере распределения нормальных напряжений

Рассмотренные прикладные методы определения напряжений в тонкостенных стержнях содержат в своей основе некоторую схематизацию действительного распределения деформаций в стержнях. Мы уже видели, что всякий раз, когда в теорию вводится какая-либо кинематическая гипотеза, число параметров, характеризующих распределение напряжений, резко уменьшается, — и тем значительнее, чем более примитивна принимаемая картина перемещений.

Иногда число указанных параметров настолько уменьшается, что проблема становится статически определимой, все напряжения однозначно определяются из уравнений статики, разумеется, при одновременном использовании закона, связывающего напряжения и деформации:

К этому классу теорий относится и теория, основанная на гипотезах, высказанных в главе II; после того как они были приняты, далее не пришлось обращаться к каким бы то ни было другим условиям, кроме уравнений равновесия.

Вместо кинематических гипотез часто бывает целесообразно упрощать решения определенными предположениями о характере распределения напряжений. Такова, например, гипотеза Навье, которая в сопротивлении материалов приводит почти всегда к результатам, тождественным результатам применения гипотезы Бернулли.

Напомним, что гипотезой Навье называют предположение о плоском законе распределения нормальных напряжений по

сечению изгибаемого стержня. Различие между результатами применения обеих гипотез обнаруживается в случае изгиба криволинейных стержней или стержней, материал которых не следует закону Гука. Действительно, легко видеть, что *гипотеза Навье и гипотеза Бернулли не эквивалентны друг другу* — первая относится к производным перемещений $\frac{\partial w}{\partial z}$ (предполагается, что напряжение σ_z определяется

только относительным удлинением ϵ_z), тогда как вторая — к самим перемещениям w . В связи с этим можно утверждать, что в гипотезе Навье содержится и меньше ограничений; в частности, гипотеза Навье не противоречит возможности сдвигов, тогда как гипотеза Бернулли их полностью отрицает.

К этому же классу статических гипотез относятся гипотезы, лежащие в основании безмоментной теории оболочек, — предположения о равномерности распределения как касательных, так и нормальных напряжений по толщине стенки.

Частично в предыдущих главах также были использованы подобные статические гипотезы: гипотеза о равномерном распределении напряжений σ_z по толщине стенки и гипотеза о равномерном распределении по толщине касательных напряжений τ_{zs} для случая стержней с замкнутым профилем. Однако выше наряду с этими гипотезами были приняты и определенные кинематические допущения.

В этом параграфе будут рассмотрены способы приближенного решения задачи, основанные только на статических гипотезах; в некоторых случаях такие способы оказываются достаточно эффективными, а в других — совершенно неудовлетворительными.

Обсудим возможности использования гипотезы Навье для определения нормальных напряжений σ_z и касательных напряжений τ_{zs} в общем случае нагружения тонкостенного стержня.

Эта гипотеза, представляющая собой простейшую аппроксимацию действительного закона распределения нормальных напряжений по сечению, приводит к формуле:

$$\sigma_z = a + bx + cy. \quad (1)$$

Принятие зависимости (1) делает задачу нахождения нормальных напряжений σ_z статически определимой, поскольку совокупность нормальных напряжений σ_z , действующих

в поперечных сечениях, должна удовлетворять трем интегральным уравнениям равновесия:

$$\int_0^l \sigma_z h \, ds = Q_z; \quad \int_0^l \sigma_z h x \, ds = -M_y; \quad \int_0^l \sigma_z h y \, ds = M_x, \quad (2)$$

число которых совпадает с числом неопределенных параметров в выражении (1).

Подстановка (1) в уравнение (2) дает возможность определить величины a , b и c из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} aF + bS_y + cS_x &= N_z, \\ aS_y + bI_y + cI_{xy} &= M_y, \\ aS_x + bI_{xy} + cI_x &= M_x, \end{aligned}$$

где F — площадь сечения стержня; S_x и S_y — статические моменты сечения относительно осей x и y ; I_x и I_y — экваториальные моменты инерции и I_{xy} — центробежный момент инерции относительно тех же осей.

Если принять в качестве осей x и y главные центральные оси инерции поперечного сечения, то эти уравнения существенно упрощаются, и для нормальных напряжений получается известный из теории сопротивления материалов результат:

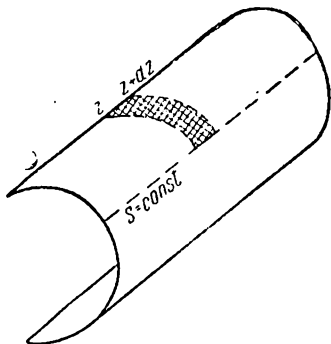
$$\sigma_z = \frac{Q_z}{F} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y. \quad (3)$$

Обратимся теперь к нахождению касательных напряжений в случае стержня с открытым профилем, принимая, что они, подобно нормальным напряжениям, постоянны по толщине. Выделим из стержня сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ и сечением вдоль образующей $s = \text{const}$ элемент, показанный на фиг. 43. Из условия равновесия этого элемента в проекции на ось z можно получить

$$\tau_{zs} = \frac{Q_y S_x}{I_x h} + \frac{Q_x S_y}{I_y h}. \quad (4)$$

Определяемые этой формулой напряжения τ_{zs} направлены всюду по касательной к средней линии поперечного сечения,

Обратим внимание на одну особенность полученных нами формул. Добавление к внешней нагрузке любых крутящих моментов не вызывает никаких дополнительных напряжений — ни нормальных σ_z , ни касательных τ_{zs} . Иными словами, если в качестве внешней нагрузки к стержню приложены по концам две крутящие пары, то они никаких напряжений не вызывают, и любой конечный отсек стержня, расположенный между торцом и сечением $z = \text{const}$, при принятых гипотезах в равновесии не находится. Физическая несостоятельность этого результата заставляет глубже рассмотреть причины его возникновения.



Фиг. 43.

Дело в том, что формула (4) дает такие значения касательных напряжений, которые обеспечивают удовлетворение двух интегральных уравнений статики:

$$\int_0^l \tau_{zs} \cos \alpha h \, ds = Q_x; \quad \int_0^l \tau_{zs} \sin \alpha h \, ds = Q_y,$$

тогда как выполнение третьего уравнения статики

$\int_0^l \tau_{zs} r h \, ds = M_z$ ничем не обеспечивается. Можно показать, что при любых внешних нагрузках совокупность касательных напряжений, определяемых формулой (4), имеет равнодействующую, проходящую через определенную точку сечения, которая обычно называется центром изгиба.

Определим координаты центра изгиба. Условием для их нахождения служит равенство нулю момента всех внутренних касательных усилий при выборе полюса в центре изгиба

$$\int_0^l \tau_{zs} r h \, ds = 0. \text{ Используя выражение для дифференциала секто-}$$

риальной площади $r ds = d\omega$ и формулу (4), определяющую касательное напряжение τ_{zs} , имеем:

$$\int_0^l \left(\frac{Q_y S_x}{I_x} + \frac{Q_x S_y}{I_y} \right) d\omega = 0. \quad (5)$$

Вспомнив теперь формулу преобразования секториальной площади при переходе от полюса в точке \mathfrak{D} к полюсу в точке O :

$$\omega = \omega^* - ay + bx + c,$$

найдем: $d\omega = d\omega^* - a dy + b dx$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & \int_0^l \frac{Q_y S_x}{I_x} d\omega^* - a \int_0^l \frac{Q_y S_x}{I_x} dy + b \int_0^l \frac{Q_y S_x}{I_x} dx + \\ & + \int_0^l \frac{Q_x S_y}{I_y} d\omega^* - a \int_0^l \frac{Q_x S_y}{I_y} dy + b \int_0^l \frac{Q_x S_y}{I_y} dx = 0. \end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$S_x = \int_0^s y h ds, \quad S_y = \int_0^s x h ds,$$

и применяя формулу для интегрирования по частям, получаем:

$$-\frac{Q_y}{I_x} \int_0^l \omega^* y h ds + a I_x \frac{Q_y}{I_x} - \frac{Q_x}{I_y} \int_0^l \omega^* x h ds - b I_y \frac{Q_x}{I_y} = 0. \quad (6)$$

Равенство (6) будет удовлетворено при произвольных значениях Q_x и Q_y , если

$$a = \frac{1}{I_x} \int_0^l \omega^* y h ds; \quad b = -\frac{1}{I_y} \int_0^l \omega^* x h ds. \quad (7)$$

При выводе последних соотношений учтено, что оси x и y являются главными центральными осями инерции поперечного сечения.

Формулы (7) тождественно совпадают с отношениями (33) гл. II, определяющими координаты центра кручения.

Тем самым, если внешняя нагрузка такова, что в каждом сечении полная перерезывающая сила проходит через центр изгиба (кручения), то условия равновесия будут удовлетворены — совокупность внутренних усилий полностью уравновешивает внешнюю нагрузку. Однако во всех случаях, когда внешняя нагрузка не удовлетворяет указанному условию, равновесие невозможно, ибо система внутренних касательных усилий не способна удержать произвольно действующую нагрузку; подобным случаем оказывается, в частности, и случай кручения.

Таким образом, данное выше решение задачи, вообще говоря, статически ¹неудовлетворительно, и интегральное

уравнение равновесия $\int_0^l \tau_{zs} r h ds = M_z$ остается в общем случае нарушенным.

Для получения удовлетворительного решения необходимо либо отказаться от гипотезы о плоском распределении нормальных напряжений, либо от гипотезы о равномерном распределении касательных напряжений по толщине стенки, либо, наконец, от обеих гипотез одновременно.

Отказ от второй гипотезы (менее грубой) при сохранении первой (более грубой) противоречит здравому смыслу, хотя и приведет к статически удовлетворительным результатам. Тем самым *в общем случае нагружения тонкостенной системы с открытым профилем приходится забраковать первую гипотезу — гипотезу Навье*. Замена гипотезы Навье более совершенными предположениями о распределении нормальных напряжений по сечению тонкостенной системы с открытым профилем была рассмотрена выше в главе II.

Применительно к стержням с замкнутым профилем гипотеза Навье приводит к тем же выражениям для нормальных напряжений:

$$\sigma_z = \frac{Q_z}{F} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y.$$

Для нахождения касательных напряжений выберем определенное начало отсчета дуг (см. точку А на фиг. 44) и выделим из стержня элемент двумя поперечными сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ и двумя меридиональными

сечениями $s=0$ и $s=s_1$, совпадающими с образующими, проходящими через точку A и текущую точку (фиг. 44). Равновесие этого элемента требует выполнения условия:

$$\tau_{zs} = \frac{Q_y S_x}{I_x h} + \frac{Q_x S_y}{I_y h} + \frac{\tau_A h_A}{h} = \bar{\tau}_{zs} + \frac{\tau_A h_A}{h}, \quad (8)$$

где τ_A — касательное напряжение в точке A ;

$\bar{\tau}_{zs}$ — касательное напряжение в текущей точке;

τ_{zs} — касательное напряжение в текущей точке, вычисляемое в предположении о наличии разреза вдоль образующей, проходящей через точку A .

Величина τ_A может быть найдена из оставшегося неудовлетворенным уравнения моментов относительно оси z . Эта ось может быть выбираема где угодно, так что в общем случае третье интегральное уравнение статики будет иметь вид:

$$\oint (\bar{\tau}_{zs} h + \tau_A h_A) r ds = M_z,$$

где h_A — расстояние касательной в текущей точке от оси z .

Отсюда определяется неизвестная величина $\tau_A h_A$:

$$\begin{aligned} \tau_A h_A &= \frac{M_z - \oint \bar{\tau}_{zs} h r ds}{\oint r ds} = \\ &= \frac{M_z - \oint \bar{\tau}_{zs} r h ds}{\Omega}, \end{aligned} \quad (9)$$

Фиг. 44.

где, как и ранее, Ω — удвоенная площадь, ограниченная контуром.

Таким образом, использованию формулы (8) должно предшествовать определение $\tau_A h_A$ по формуле (9).

Из изложенного ясно, что *тонкостенный стержень с замкнутым профилем в нашей постановке задачи статически определим и геометрически неизменяем*; любой совокупности внешних нагрузок отвечают вполне определенные внутренние усилия, определяемые формулами (3) и (8).

При практическом применении формулы (9) часто используется в качестве полюса для вычисления моментов та точка поперечного сечения, относительно которой обращается в нуль момент $\oint \tau_{zs} r h ds$. Вызываемое этим упрощение носит чисто внешний характер, поскольку в этом случае приходится предварительно определить координаты такого полюса.

В качестве примера определим касательные напряжения τ_{zs} при нагружении тонкостенной четырехгранной трубы силой P . Поперечное сечение трубы и положение силы P показаны на фиг. 45, а.

Прежде всего выберем начало отсчета дуг (точка A на фиг. 45, а) и определим касательные усилия $\bar{\tau}_{zs} h$ по формуле:

$$\bar{\tau}_{zs} h = \frac{QS}{I} \quad (\text{фиг. 45, б}).$$

Избрав теперь в качестве полюса точку O , лежащую на линии действия силы, находим по формуле (9):

$$\tau_A h_A = \frac{-\oint \tau_{zs} r h ds}{\frac{1}{2} ab} = -\frac{P}{4(b+3a)},$$

ибо $M_z = 0$.

Соответственно этому значение касательного усилия $\tau_{zs} h$ в произвольной точке будет

$$\tau_{zs} h = \bar{\tau}_{zs} h - \frac{P}{4(b+3a)}.$$

На фиг. 45, в показано распределение напряжений τ_{zs} по контуру поперечного сечения.

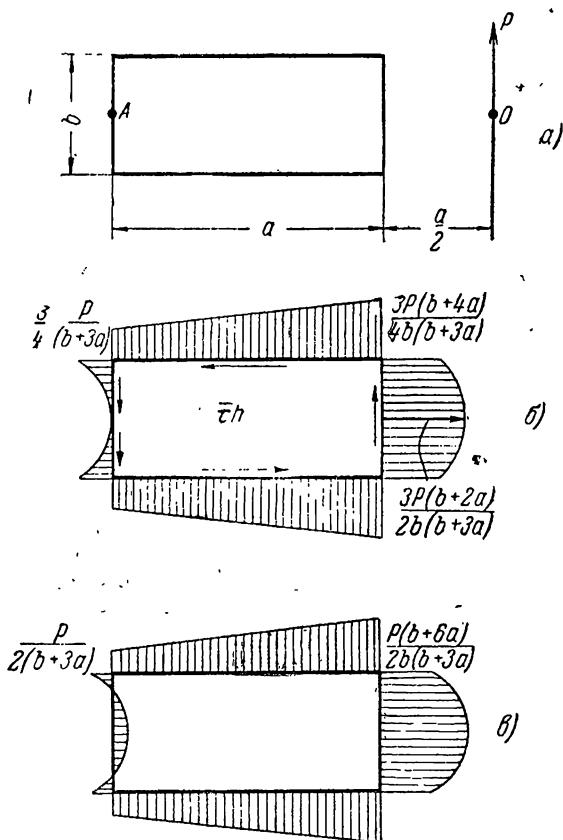
В частном случае, когда внешней нагрузкой служит крутящий момент из (9), получим уже известный результат

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{\Omega}, \quad (10)$$

так как $\bar{\tau}_{zs} = 0$.

В заключение отметим, что возможность удовлетворения всем уравнениям равновесия отнюдь не означает приемлемости следующих из нее зависимостей во всех случаях, ибо иногда

условия неразрывности деформаций оказываются грубо нарушенными. Так, например, формула (10) дает результат, приемлемый лишь в тех сечениях, которые достаточно удалены



Фиг. 45.

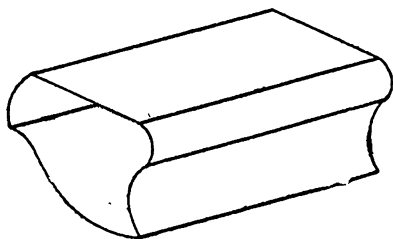
от мест стеснения перемещений. Для сечений, близких к таким местам, удовлетворительные результаты в рамках гипотезы о плоском распределении нормальных напряжений σ_z получены быть не могут.

§ 2. Способы, основанные на замене тонкостенного стержня системой тонких поясов, работающих на продольные усилия и связанных обшивкой, работающей на сдвиг.

Статически определимые задачи.

В настоящем параграфе будут рассмотрены способы решения задач о стесненном кручении, основанные на приближенной замене тонкостенного стержня системой тонких поясов, работающих на продольные усилия и связанных обшивкой, работающей только на сдвиг.

Такая расчетная схема иногда является приемлемой идеализацией реальных конструкций, содержащих относительно жесткие продольные элементы (пояса) при сравнительно тонкой обшивке, их соединяющей.



Фиг. 46.

Подобные расчетные схемы (фиг. 46) имеют отношение к теме настоящей книги лишь постольку, поскольку в указанных системах обеспечена неизменяемость контура поперечного сечения.

При изучении таких конструкций принято, кроме указанного разделения системы на элементы, находящиеся в различных напряженных состояниях, предполагать еще следующее.

1. Касательные напряжения распределяются по толщине обшивки равномерно.

2. Нормальные напряжения распределяются по сечению пояса равномерно и поэтому их совокупность может быть заменена равнодействующей, приложенной в центре тяжести сечения пояса; при этом сам пояс схематизируется в виде упругой материальной линии, воспринимающей только усилия растяжения — сжатия.

Из предположения об отсутствии нормальных напряжений в сечениях стенок и уравнения равновесия элемента

$$h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{zs} h)}{\partial s} = 0$$

(мы считаем, что для стенки $p_z = 0$) следует, что усилие $S = \tau_{zs} h$ для данной стенки зависит только от координаты z .

Таким образом основными неизвестными будут:

1. Продольные усилия $N_i(z)$ (i — номер пояса);
2. Касательные усилия $S_k(z)$ (k — номер стенки).

Связь между этими неизвестными устанавливается из уравнения равновесия бесконечно малого элемента пояса (фиг. 47):

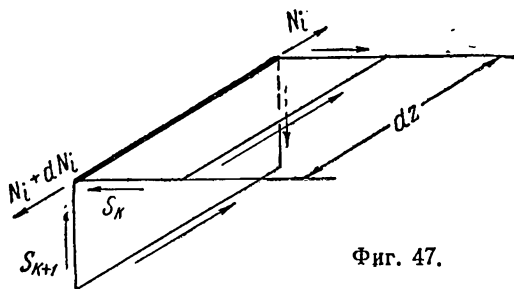
$$(N_i + dN_i) - N_i - \sum_{k=1}^n S_k dz = 0,$$

где n — число стенок, примыкающих к i -му поясу.

Из этого уравнения находим:

$$\frac{dN_i}{dz} = \sum_{k=1}^n S_k. \quad (11)$$

(Показанные на фиг. 47 направления S_k считаются положительными.) Отметим теперь простую связь между касательным



Фиг. 47.

усилием S_k и равнодействующей всех касательных усилий, развивающихся в сечении k -ой стенки. Выбирая координатную систему x^* , y^* так, как это показано на фиг. 48, имеем:

$$\left. \begin{aligned} R_{yk} &= \int_a^b S_k \frac{dy^*}{ds} ds = S_k H_k \\ R_{xk} &= \int_a^b S_k \frac{dx^*}{ds} ds = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где H_k — длина хорды, стягивающей дугу k -ой стенки. Таким образом равнодействующая всех касательных усилий, развивающихся в сечении k -ой стенки, равна произведению касательного усилия на расстояние между концевыми точками стенки и направлена параллельно прямой, соединяющей эти точки (фиг. 48).

Расстояние от указанной прямой до линии действия равнодействующей может быть найдено из уравнения моментов относительно образующей, проходящей через верхний конец стенки:

$$R_k x_k^0 = \int_0^{l_k} S_k r \, ds = S_k \omega_k, \quad (13)$$

где ω_k — удвоенная величина площади, ограниченной срединной линией сечения k -ой стенки и прямой AB ; l_k — длина срединной линии сечения k -ой стенки.

Из (13) при учете (12) находим расстояние от линии действия силы R_k до прямой, соединяющей концы стенки,

$$x_k^0 = \frac{\omega_k}{H_k}. \quad (14)$$

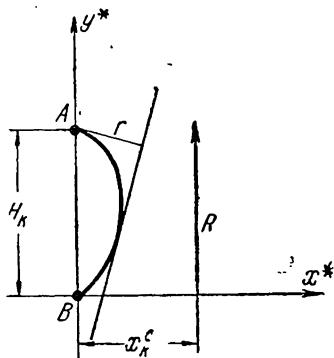
После нахождения линий действия сил R_k остается определить их величины. Для этого воспользуемся уравнениями равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m R_k \cos \alpha_k &= Q_x, & \sum_{k=1}^m R_k \sin \alpha_k &= Q_y, \\ \sum_{k=1}^m R_k r_k &= M_z, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где m — число стенок,

α_k — угол между положительным направлением оси x и направлением линии действия силы R_k ,

r_k — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на линию действия силы R_k ,



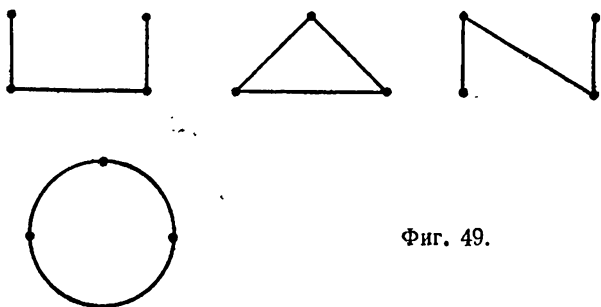
Фиг. 48.

Q_x, Q_y — перерезывающие силы,
 M_z — крутящий момент.

Величины Q_x, Q_y и M_z предполагаются известными.

Если $t < 3$, то система геометрически изменяема, так как число уравнений равновесия превосходит число неизвестных и поэтому удовлетворить всем уравнениям, вообще говоря, невозможно.

Если $t = 3$, то задача статически определима, и силы R_k определяются из уравнений (15).



Фиг. 49.

Наконец, если $t < 3$, то задача статически неопределима и кроме уравнений (15) необходимо использовать условия неразрывности деформаций.

Поперечные сечения некоторых статически определимых систем показаны на фиг. 49. После определения тем или иным способом сил R_k следует вернуться к уравнениям (11)

$$\frac{dN_i}{dz} = \sum_{k=1}^n S_{ik} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{H_k} \quad (16)$$

и из них, используя граничные условия, найти силы N_i .

Рассмотрим в качестве примера статически определимой задачи нахождение внутренних усилий, возникающих при кручении плоскостенного швеллера моментом M_z (фиг. 50).

В этих условиях система (15) принимает вид:

$$\begin{aligned} R_2 &= 0, \\ -R_1 + R_3 &= 0, \\ R_1 \frac{H_2}{2} + R_3 \frac{H_2}{2} &= M_z, \end{aligned}$$

откуда для сил R_1 , R_2 , R_3 находим

$$R_1 = \frac{M_z}{H_2}, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = \frac{M_z}{H_2}.$$

Далее из уравнения (13) определяем производные усилий в поясах:

$$\dot{N}_1 = -\frac{R_1}{H_1} = -\frac{M_z}{H_1 H_2},$$

$$\dot{N}_2 = \frac{R_1}{H_1} = \frac{M_z}{H_1 H_2},$$

$$\dot{N}_3 = -\frac{R_3}{H_3} = -\frac{M_z}{H_2 H_3},$$

$$\dot{N}_4 = \frac{R_3}{H_3} = \frac{M_z}{H_2 H_3}.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$N_1 = \frac{M_z}{H_1 H_2} (L - z);$$

$$N_2 = -\frac{M_z}{H_1 H_2} (L - z);$$

$$N_3 = \frac{M_z}{H_2 H_3} (L - z);$$

$$N_4 = -\frac{M_z}{H_2 H_3} (L - z);$$

так как при $z = L$:

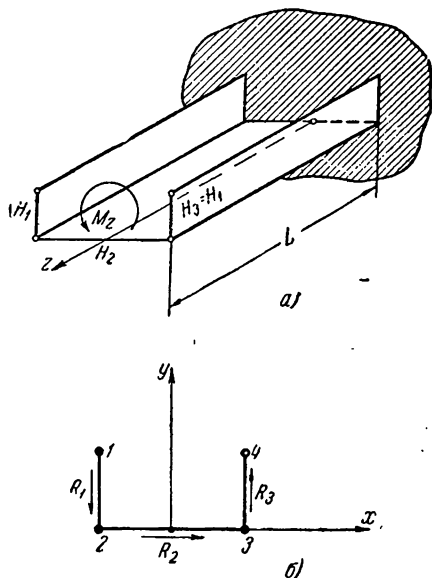
$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0.$$

Полученное решение свидетельствует о линейном характере изменения усилий N_i по длине системы. Касательные усилия S_k от координаты z не зависят.

В заделке развивается самоуравновешенная система четырех равных по абсолютной величине усилий N_i , образующих би-пару, бимомент которой равен

$$B_\omega(0) = N(0)H_1H_2 = M_zL.$$

С качественной стороны найденное решение совпадает с решением аналогичной задачи о кручении швеллера в



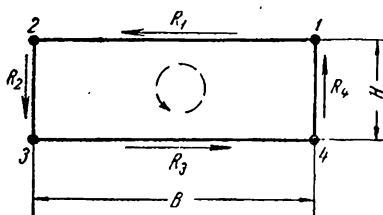
Фиг. 50.

постановке гл. II при пренебрежении жесткостью свободного кручения; отличие состоит лишь в замене непрерывного распределения нормальных напряжений σ_z системой дискретных усилий N_i .

§ 3. Способы, основанные на замене тонкостенного стержня системой тонких поясов, работающих на продольные усилия и связанных обшивкой, работающей на сдвиг.

Статически неопределимые задачи

В качестве примера статически неопределимой системы рассмотрим задачу о кручении замкнутой коробчатой консоли прямоугольного сечения при произвольном распределении внешних крутящих моментов m_z (фиг. 51).



Фиг. 51.

В этом случае число неизвестных усилий R_k на единицу больше числа уравнений статики. Это вынуждает использовать при решении задачи не только уравнения равновесия, но и

вариационный принцип Кастильяно, соответствующий уравнениям неразрывности.

Принимая за лишнее неизвестное силу R_1 (фиг. 51), имеем из уравнений статики усилия в стенках:

$$R_3 = R_1,$$

$$R_2 = R_4 = \frac{M}{B} - R_1 \frac{H}{B}.$$

Из дифференциального уравнения (16) находим, учитывая правило знаков, производные от продольных усилий в поясах

$$\dot{N}_3 = \dot{N}_1 = \frac{M}{BH} - \frac{2R_1}{B};$$

$$\dot{N}_4 = \dot{N}_2 = \frac{2R_1}{B} - \frac{M}{BH}.$$

Теперь удобнее вместо лишнего неизвестного R_1 ввести в качестве основного неизвестного продольную силу N_1 . Тогда другие усилия определяются формулами

$$\begin{aligned} N_2 &= N_4 = -N_1; \quad N_3 = N_1; \\ R_3 &= R_1 = -\frac{B\dot{N}_1}{2} + \frac{M}{2H}; \quad R_2 = R_4 = \frac{M}{2B} + \frac{H\dot{N}_1}{2}; \\ S_2 &= S_4 = \frac{M}{2BH} + \frac{\dot{N}_1}{2}; \quad S_3 = S_1 = -\frac{\dot{N}_1}{2} + \frac{M}{2BH}. \end{aligned}$$

Вычислим потенциальную энергию рассматриваемой системы, пользуясь известной формулой,

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{N_i^2}{2EF_i} + \frac{S_k^2 l_k}{2\mu h_k} \right) dz, \quad (17)$$

где F_i — площадь сечения i -го пояса (ниже принято $F_i = \text{const}$),
 l_k — длина средней линии сечения k -ой стенки

$$(l_1 = l_3 = B; \quad l_2 = l_4 = H),$$

h_k — толщина k -ой стенки (ниже считается постоянной).
 Подставляя (16) в (17), получаем

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{2N_1^2}{EF} + \frac{\left(\frac{M}{2BH} - \frac{\dot{N}_1}{2} \right)^2 B}{\mu h} + \frac{\left(\frac{M}{2BH} + \frac{\dot{N}_1}{2} \right)^2 H}{\mu h} \right] dz.$$

Согласно теореме Кастильяно функция N_1 должна быть такой, чтобы потенциальная энергия системы была минимальна.

Уравнение Эйлера — Лагранжа для рассматриваемого функционала имеет вид (Γ — подинтегральное выражение):

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial N_1} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{N}_1} = 0$$

или

$$\ddot{N}_1 - \frac{8\mu h}{EF(B+H)} N_1 = m \frac{B-H}{BH(B+H)}, \quad (18)$$

где $m = \frac{dM_z}{dz}$.

Вводя параметр λ :

$$\lambda = \sqrt{\frac{8\mu h}{EF(B+H)}}, \quad (19)$$

запишем уравнение (18) в виде

$$\ddot{N}_1 - \lambda^2 N_1 = m \frac{2(B-H)}{\Omega(B+H)}. \quad (20)$$

Естественное граничное условие при $z=0$ дает

$$\dot{N}_1 = \frac{B-H}{BH(B+H)} M(0). \quad (21)$$

При $z=L$ граничное условие очевидно $N_1(L)=0$.

Интегрируя (20), получаем

$$N_1 = A_1 \operatorname{sh} \lambda z + A_2 \operatorname{ch} \lambda z + 2 \frac{(B-H)}{\lambda(B+H)\Omega} \int_0^z m(z_1) \operatorname{sh} \lambda(z-z_1) dz_1$$

или, после использования граничных условий,

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{2(B-H)}{\lambda(B+H)\Omega} \left\{ -M(0) \frac{\operatorname{sh} \lambda(L-z)}{\operatorname{ch} \lambda L} + \right. \\ & + \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{ch} \lambda L} \int_0^L m(z_1) \operatorname{sh} \lambda(L-z_1) dz_1 + \\ & \left. + \int_0^z m(z_1) \operatorname{sh} \lambda(z-z_1) dz_1 \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

что по структуре совпадает с результатом, полученным в гл. II для аналогичной задачи.

Пользуясь последним выражением, найдем продольную силу в заделке; подставляя $z=0$, имеем:

$$\begin{aligned} N_1(0) = & \frac{2(B-H)}{\lambda(B+H)\Omega} \left[-M(0) \operatorname{th} \lambda L + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda L} \int_0^L m(z_1) \operatorname{sh} \lambda(L-z_1) dz_1 \right]. \end{aligned}$$

В случае, когда кручение осуществляется только крутящим моментом, приложенным на торце, усилие в заделке определяется формулой

$$N_1(0) = - \frac{2(B-H)}{\lambda(B+H)} M \operatorname{th} \lambda L.$$

Располагая (22), можно без труда найти и все касательные усилия.

Если рассматривать систему как совокупность конечного числа отсеков, нагруженных лишь крутящими моментами, приложенными в сечениях, разделяющих отсеки, то известная функция $N(z)$ заменяется рядом неизвестных чисел N_n , соответственно номерам сечений, разделяющих отсеки. В промежуточных сечениях продольные усилия N линейно зависят от координаты z .

Полная потенциальная энергия такой системы может быть выражена через ряд лишних неизвестных чисел $N_n, N_{n+1} \dots$. Условие обращения энергии в минимум приводит к системе алгебраических уравнений, определяющей лишние неизвестные.

Подобные уравнения обладают структурой трехчленных уравнений теории неразрезных балок и были получены впервые В. Н. Беляевым в 1932 г. [3] специально для четырехстенного кессона. Эти уравнения называют уравнениями трех осевых сил.

Применительно к сечению рассмотренной выше системы уравнение трех осевых сил имеет вид:

$$\begin{aligned} N_{n-1} + \frac{16\mu l^2 h + 6EF(B+H)}{4\mu l^2 h - 3EF(B+H)} N_n + N_{n+1} = \\ = - (M_{n+1} - M_n) \frac{3lEF(B-H)}{4\mu l^2 h BH - 3E(B+H)BHF}, \end{aligned}$$

где M_n и M_{n+1} — внешние крутящие моменты в соответствующих сечениях, l — длина отсека.

Устремляя l к нулю и замечая, что

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{M_{n+1} - M_n}{l} = m(z); \quad \frac{d^2 N}{dz^2} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{N_{n+1} - 2N_n + N_{n-1}}{l^2},$$

получим уравнение (20).

ГЛАВА V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Основные уравнения

Излагаемая ниже общая теория равновесия тонкостенных стержней развита в работах Р. А. Ададунова [1][1a] (1943—1948 гг.), который строго решил задачу о напряжениях и деформациях в безмоментной цилиндрической оболочке произвольной формы, подкрепленной по всей длине непрерывно расположенными жесткими в своей плоскости диафрагмами.

Для распространения результатов этой работы на задачу о деформации тонкостенных стержней нужно принять следующие гипотезы:

1. Распределение внутренних сил в сечении $z = \text{const}$ характеризуется напряжениями σ_z и τ_{zs} .

2. Крутящий момент \overline{M}_z равен нулю в случае закрытого профиля и связан с углом закручивания на единицу длины δ соотношением

$$\overline{M}_z = C\delta$$

для стержня с открытым профилем.

3. При деформации стержня проекция срединной линии поперечного сечения стержня на плоскость $z = \text{const}$ неизменяема (гипотеза о неизменяемости контура).

При этих условиях справедливы следующие уравнения равновесия, выведенные в главе I:

$$\frac{\partial (\sigma_z h)}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{zs} h)}{\partial s} + p_z = 0; \quad (1)$$

$$\int_0^l \tau_{zs} h x' ds = Q_x(z); \quad (2)$$

$$\int_0^l \tau_{zs} h y' ds = Q_y(z); \quad (3)$$

$$\int_0^l \tau_{zs} h \omega' ds + C \delta = M_z(z); * \quad (4)$$

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (5)$$

$$\tau_{zs} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial s} + \xi_0 x' + \eta_0 y' + \delta \omega' \right], \quad (6)$$

в которых Q_x , Q_y , M_z обозначают перерезывающие силы и крутящий момент в сечении $z = \text{const}$.

Заметим, что подстановка (5) и (6) в уравнение (1) и дифференцирование по z уравнений (2), (3) и (4) приводит к системе уравнений в перемещениях (47) — (50) главы I.

Для упрощения системы (1) — (6) можно, кроме приема приведения к уравнениям в перемещениях, использовать и широко принятый в теории упругости способ решения, основанный на введении *функции напряжений или перемещений*. Пусть функция напряжений и перемещений $\Phi(z, s)$ связана с w и τ_{zs} соотношениями:

$$w(z, s) = \frac{1}{Eh(s)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{1}{l} \int_0^s \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \right], \quad (7)$$

$$\tau_{zs} = -\frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + P(z, s) \right], \quad (8)$$

в которых

$$P(z, s) = \int_0^s p_z(z, t) dt - \frac{s}{l} \int_0^l p_z(z, t) dt \quad (9)$$

* Запись этого уравнения равновесия отличается от данной Р. А. Ададуриным, который полагал $M_z = 0$, рассматривая оболочку как безмоментную.

специально построенная функция нагрузки p_z , удовлетворяющая условиям периодичности для стержней с закрытым профилем и условиям вида $P(z, 0) = P(z, l) = 0$, для стержней с открытым профилем.

Заметим, что $P(z, s)$ представляет собой результат интегрирования уклонения нагрузки $p_z(z, s)$ от ее среднего значения по сечению $\frac{1}{l} \int_0^l p_z(z, t) dt$.

Своеобразие введения функции $\Phi(z, s)$ состоит в том, что через ее производные непосредственно определяются, с одной стороны, касательные напряжения τ_{zs} , а с другой стороны, — перемещение w . Именно поэтому мы назвали Φ функцией напряжений и перемещений.

Зная (7) и используя (5), получаем формулу, связывающую нормальное напряжение σ_z с функцией $\Phi(z, s)$:

$$\sigma_z = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} - \frac{1}{l} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) ds d\zeta \right]. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (10) в первое уравнение статики, можно убедиться, что оно тождественно удовлетворяется. Это обстоятельство является следствием специального подбора выражений для перемещения w и касательного напряжения τ_{zs} .

Введение (7), (8), (10) в остальные уравнения статики и в соотношение (6) приводит к системе из трех интегро-дифференциальных уравнений и одного дифференциального, содержащей четыре неизвестных функции $\Phi(z, s)$, ξ_0 , η_0 , ϑ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h(s)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{h(s)} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] = \\ & = \frac{k^2}{l} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta - \\ & - \frac{1}{h(s)} P(z, s) - \mu [\dot{\xi}_0(z) x'(s) + \dot{\eta}_0(z) y'(s) + \\ & + \dot{\vartheta}(z) \omega'(s)], \quad (11) \end{aligned}$$

$$-\int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + P(z, s) \right\} \frac{dx}{ds} ds = Q_x(z), \quad (12)$$

$$-\int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + P(z, s) \right\} \frac{dy}{ds} ds = Q_y(z), \quad (13)$$

$$C\dot{\Phi} - \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + P(z, s) \right\} r ds = M_z(z). \quad (14)$$

Подставляя вторую производную $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ из (11) в (12), (13) и (14), получаем иную форму трех последних уравнений системы:

$$\begin{aligned} L_y \dot{\xi}_0 + L_{xy} \dot{\eta}_0 + K_y \dot{\Phi} = \frac{Q_x}{\mu} - \frac{1}{E} \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] x'(s) h ds + \\ + \frac{1}{lE} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \cdot \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) x'(s) h ds; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L_{xy} \dot{\xi}_0 + L_x \dot{\eta}_0 + K_x \dot{\Phi} = \frac{Q_y}{\mu} - \frac{1}{E} \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] y'(s) h ds + \\ + \frac{1}{lE} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \cdot \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) y'(s) h ds; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} K_y \dot{\xi}_0 + K_x \dot{\eta}_0 + \bar{I}_\rho \dot{\Phi} = \frac{M_z}{\mu} - \frac{1}{E} \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] \omega'(s) h ds + \\ + \frac{1}{lE} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \cdot \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) \omega'(s) h ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь введены уже встречавшиеся в гл. I обозначения:

$$I_p = \int_0^l \omega'^2 h \, ds, \quad K_x = \int_0^l \omega' y' h \, ds;$$

$$K_y = \int_0^l \omega' x' h \, ds;$$

$$L_{xy} = \int_0^l x' y' h \, ds; \quad L_x = \int_0^l y'^2 h \, ds; \quad L_y = \int_0^l x'^2 h \, ds;$$

$$\bar{I}_p = I_p + \frac{C}{\mu}.$$

Соотношения (15, 16 и 17) позволяют выразить производные $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\vartheta}$ через функцию $\Phi(z, s)$ и известные величины. Для этого удобнее всего найти производные $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\vartheta}$ из уравнений (15, 16 и 17) с помощью определителей.

Обозначая определитель системы через Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_y & L_{xy} & K_y \\ L_{xy} & L_x & K_x \\ K_y & K_x & \bar{I}_p \end{vmatrix}$$

и определители, получаемые заменой в Δ столбцов правыми частями уравнений, через

$$\frac{1}{\mu} H_{\xi}(\alpha, \beta, \gamma); \quad \frac{1}{\mu} H_{\eta}(\alpha, \beta, \gamma); \quad \frac{1}{\mu} H_{\vartheta}(\alpha, \beta, \gamma),$$

имеем:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{1}{\mu \Delta} H_{\xi}(\alpha, \beta, \gamma); \quad \dot{\eta}_0 = \frac{1}{\mu \Delta} H_{\eta}(\alpha, \beta, \gamma);$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\mu \Delta} H_{\vartheta}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (18)$$

где

$$H_{\xi}(\alpha, \beta, \gamma) = (\bar{I}_p L_x - K_x^2) \alpha - (\bar{I}_p L_{xy} - K_x K_y) \beta - \\ - (L_x K_y - L_{xy} K_x) \gamma, \quad (19)$$

$$H_{\eta}(\alpha, \beta, \gamma) = -(\bar{I}_p L_{xy} - K_x K_y) \alpha + (\bar{I}_p L_y - K_y^2) \beta - \\ - (L_y K_x - L_{xy} K_y) \gamma, \quad (20)$$

$$H_{\theta}(\alpha, \beta, \gamma) = - (L_x K_y - L_{xy} K_x) \alpha - \\ - (L_y K_x - L_{xy} K_y) \beta + (L_x L_y - L_{xy}^2) \gamma, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= Q_x - k^2 \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) x'(s) h ds + \\ &+ \frac{k^2}{l} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \cdot \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) x' h ds, \\ \beta &= Q_y - k^2 \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) y'(s) h ds + \\ &+ \frac{k^2}{l} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \cdot \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) y' h ds, \\ \gamma &= M_z - k^2 \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \omega'(s) h ds + \\ &+ \frac{k^2}{l} \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta \cdot \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) \omega'(s) h ds. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Исключив из (11) с помощью (18) производные $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ и $\dot{\theta}$, приходим к уравнению, определяющему функцию напря-

жений и перемещений:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] - \\
 & - \frac{k^2}{\Delta} \left[H_{\xi}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) x' h ds + \right. \\
 & \quad + H_{\eta}(x', y', z') \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) y' h ds + \\
 & \quad \left. + H_{\theta}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \omega' h ds \right] = \\
 & = - \frac{1}{\Delta} [H_{\xi}(x', y', \omega') Q_x + H_{\eta}(x', y', \omega') Q_y + \\
 & \quad + H_{\theta}(x', y', \omega') M_z] - \\
 & \quad - \frac{k^2}{l \Delta} \left[H_{\xi}(x', y', z') \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) x' h ds + \right. \\
 & \quad + H_{\eta}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) y' h ds + \\
 & \quad \left. + H_{\theta}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) \omega' h ds \right] \times \\
 & \quad \times \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) d\zeta ds + \\
 & \quad + \frac{k^2}{l} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \right) \int_0^z \int_0^l p_z(\zeta, s) (z - \zeta) ds d\zeta - \frac{1}{h} P(z, s). \quad (23)
 \end{aligned}$$

В дальнейшем изложении уравнение (23) будет играть основную роль, так как нахождение перемещений ξ_0 , η_0 , θ после определения функции $\Phi(z, s)$ уже не представляет

затруднений и может быть осуществлено путем интегрирования уравнений (18).

В случае стержней постоянной толщины уравнение (23) принимает более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{k^2 h}{\Delta} \left[H_{\xi}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} x' ds + \right. \\ \left. + H_{\eta}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} y' ds + \right. \\ \left. + H_{\theta}(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \omega' ds \right] = \\ = -\frac{h}{\Delta} [H_{\xi}(Q_x, Q_y, M_z) x' + H_{\eta}(Q_x, Q_y, M_z) y' + \\ + H_{\theta}(Q_x, Q_y, M_z) \omega'] - P(z, s). \end{aligned} \quad (24)$$

Выпишем теперь граничные условия для уравнения, определяющего функцию $\Phi(z, s)$. Они будут различными в зависимости от того, рассматриваются открытые или закрытые профили.

Считая, что в случае открытого профиля продольные края стержня свободны от касательных усилий τ_{zs} , имеем (см. гл. I, стр. 35)

$$\tau_{zs}(z, 0) = 0, \quad \tau_{zs}(z, l) = 0, \quad (25)$$

или на основании соотношения (8):

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{s=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{s=l} = 0, \quad (26)$$

так как

$$P(z, 0) = P(z, l) = 0.$$

В случае закрытого профиля условие (26) заменяется требованием периодичности функции $\Phi(z, s)$:

$$\Phi(z, s) = \Phi(z, s + l). \quad (27)$$

Граничные условия для функции $\Phi(z, s)$ в точках торцов определяются характером закрепления торцевых сечений.

При задании на торцах распределения нормальных напряжений, т. е. функций $\sigma_z(0, s)$ и $\sigma_z(L, s)$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} \Big|_{z=0} &= \sigma_z(0, s); \\ \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} \Big|_{z=L} - \frac{1}{l} \int_0^L \int_0^l p_z dz ds \right] &= \sigma_z(L, s), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} \Big|_{z=0} &= h \sigma_z(0, s); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} \Big|_{z=L} &= h \sigma_z(L, s) + \frac{1}{l} \int_0^L \int_0^l p_z dz ds. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Задание на торцах перемещений $w(0, s)$ и $w(L, s)$ приводит к граничным условиям вида:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{z=0} = \bar{E} h w(0, s); \quad (30)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{z=L} = \bar{E} h w(L, s) + \frac{1}{l} \int_0^L \int_0^l p_z (z - \zeta) d\zeta ds. \quad (31)$$

Интересно отметить, что уравнения, аналогичные (23), могут быть получены и для других неизвестных функций σ_z , τ_{zs} , w . При этом левая часть уравнения (23) сохраняет свой вид при замене $\Phi(z, s)$ на новую неизвестную функцию. Правые же части таких уравнений, хотя и различны, но зависят от тех же известных величин, что и правая часть уравнения (23). Разумеется, что граничные условия (26, 27, 28, 29, 30, 31) должны быть соответствующим образом изменены. В некоторых задачах удобнее исходить из указанных модификаций основного уравнения (§ 6).

В заключение заметим, что добавление к функции $\Phi(z, s)$ члена вида $Az + B$ не сказывается ни на напряжениях, ни на перемещении w (A и B произвольные постоянные).

После нахождения функции $\Phi(z, s)$ решением уравнения (23) перемещения ξ_0, η_0, ϑ определяются из системы трех дифференциальных уравнений первого порядка в полных производных (15), (16) и (17). Граничные условия для этой системы соответственно ее порядку могут состоять лишь в задании значений ξ_0, η_0, ϑ в каком-либо сечении (разумеется, что для каждой из функций ξ_0, η_0, ϑ может быть указано свое сечение).

На первый взгляд может показаться странной невозможность задания значений ξ_0, η_0, ϑ на обоих торцах стержня. Причиной этого является использование основного уравнения в форме, предполагающей, что перерезывающие силы Q_x, Q_y и крутящий момент M_z в поперечных сечениях *заранее известны, что может быть лишь в случае, когда закреплен только один торец*. Задание перемещений ξ_0, η_0, ϑ в двух сечениях не позволяет из уравнений равновесия найти интегральные статические факторы Q_x, Q_y, M_z и вынуждает дифференцировать основную систему по координате z . Тогда неизвестные интегральные статические факторы замещаются заданными погонными нагрузками q_x, q_y, m_z , а система уравнений для определения перемещений ξ_0, η_0, ϑ становится системой второго порядка. При этом уже оказывается возможным задавать перемещения на обоих торцах стержня.

Представляет интерес возможность легкого определения значений производных $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\vartheta}$ в сечении, которое при деформации стержня остается плоским, без предварительного нахождения функции Φ .

Вместе с этим становится возможным и определение касательных напряжений в этих сечениях (см. § 3 настоящей главы).

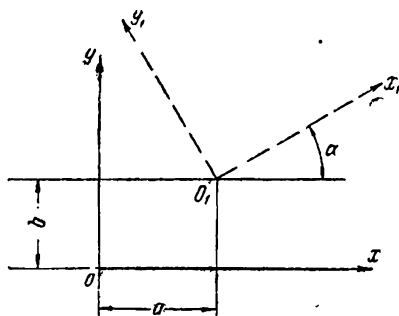
§ 2. Геометрические характеристики поперечного сечения

В настоящем параграфе будут рассмотрены важнейшие свойства некоторых геометрических характеристик поперечного сечения стержня. Величины $r(s)$ и $\omega(s)$ уже изучены в гл. II, § 2 и в гл. III, § 4, поэтому можно сразу обратиться к введенным в гл. I характеристикам, зависящим от

формы срединной линии и толщины стенки:

$$\left. \begin{aligned} I_p &= \int_0^l r^2 h \, ds; & K_x &= \int_0^l \omega' y h \, ds; & K_y &= \int_0^l \omega' x h \, ds; \\ L_{xy} &= \int_0^l y' x' h \, ds; & L_x &= \int_0^l y'^2 h \, ds; & L_y &= \int_0^l x'^2 h \, ds. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Прежде всего рассмотрим изменение этих шести интегралов при переносе и повороте координатных осей.



Фиг. 52.

Пусть координатная система $X_1 O_1 Y_1$ получается из системы $X O Y$ переносом начала в точку $O_1(a, b)$ и поворотом на угол α . Координаты точек контура в обеих системах связаны очевидными из фиг. 52 соотношениями:

$$x_1 = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \quad (33)$$

$$y_1 = (y - b) \cos \alpha - (x - a) \sin \alpha. \quad (34)$$

Дифференцируя (33) и (34) по s , получаем

$$x'_1 = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha, \quad (35)$$

$$y'_1 = y' \cos \alpha - x' \sin \alpha. \quad (36)$$

Кроме того, для перпендикуляра $r(s)$ имеем:

$$r_1(s) = x_1 y'_1 - y_1 x'_1 = x y' - y x' + b x' - a y',$$

т. е.

$$r_1(s) = r(s) + b x' - a y'. \quad (37)$$

Подставляя (35), (36) и (37) в интегралы (32), записанные в системе x_1, y_1 , приходим после интегрирования к искомым формулам преобразования:

$$I_{r_1} = I_r - 2K_x a + 2K_y b + L_x a^2 - 2L_{xy} ab + L_y b^2,$$

$$K_{x_1} = K_x \cos \alpha - K_y \sin \alpha - L_x a \cos \alpha + L_{xy} (a \sin \alpha + b \cos \alpha) - L_y b \sin \alpha,$$

$$K_{y_1} = K_y \cos \alpha + K_x \sin \alpha + L_y b \cos \alpha + L_{xy} (b \sin \alpha - a \cos \alpha) - L_x a \sin \alpha,$$

$$L_{y_1 x_1} = L_{yx} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (L_x - L_y) \sin 2\alpha,$$

$$L_{x_1} = L_x \cos^2 \alpha - L_{xy} \sin 2\alpha + L_y \sin^2 \alpha,$$

$$L_{y_1} = L_y \cos^2 \alpha + L_{xy} \sin 2\alpha + L_x \sin^2 \alpha.$$

Интегралы I_r , L_x , L_y всегда положительны. Сумма интегралов L_x и L_y

$$L_x + L_y = L_{x_1} + L_{y_1} = \oint_0^l h \, ds = F$$

инвариантна по отношению к рассматриваемому преобразованию координатной системы и равна площади поперечного сечения F .

Исследуем теперь изменение интегралов I_{r_1} , $K_{x_1} \dots L_{y_1}$ в зависимости от параметров преобразования a , b , α . Приравняв нулю производные $\frac{\partial L_{y_1}}{\partial a}$ и $\frac{\partial L_{x_1}}{\partial a}$, находим, что интегралы L_{y_1} и L_{x_1} имеют экстремальное значение при $\alpha = \alpha_0$, определяемом из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2L_{xy}}{L_x - L_y}.$$

Тогда

$$L_{y_0} = L_{\max} = \frac{1}{2} (F + \sqrt{(L_x - L_y)^2 + 4L_{xy}^2}), \quad (38)$$

$$L_{x_0} = L_{\min} = \frac{1}{2} (F - \sqrt{(L_x - L_y)^2 + 4L_{xy}^2}). \quad (39)$$

При $\alpha = \alpha_0$ величина L_{xy} обращается в нуль. Оси X_0OY_0 будем называть главными осями сдвига.

Интеграл I_p зависит от параметров a и b и также всегда положителен. Обычными способами можно показать, что при

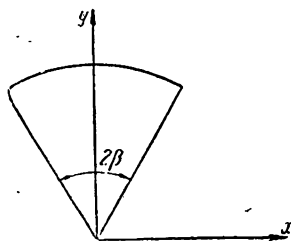
$$a_c = \frac{L_y K_x - L_{xy} K_y}{L_x L_y - L_{xy}^2}; \quad b_c = -\frac{L_x K_y - L_{xy} K_x}{L_x L_y - L_{xy}^2} \quad (40)$$

этот интеграл достигает минимального значения:

$$I_{p \min} = I_p - K_x a_c + K_y b_c \quad (41)$$

и одновременно в нуль обращаются интегралы K_{y_0} и K_{x_0} . Точку с координатами a_c , b_c назовем вслед за Р. А. Ададуровым *центром сдвига*.

Принимая начало координат в центре сдвига и совмещая оси YOZ с главными осями сдвига (такую систему осей называют *главными центральными осями сдвига*), имеем



Фиг. 53.

$$\begin{aligned} I_p &= I_{\min}; \quad L_x = L_{\min}; \\ L_y &= L_{\max}; \quad L_{xy} = K_x = K_y = 0. \end{aligned}$$

Для простоты далее будем вместо I_{\min} писать просто I .

Вычисление рассматриваемых интегральных характеристик особенно упрощается, если поперечное сечение стержня имеет оси симметрии.

При наличии одной оси симметрии, совмещенной с осью OX , центр

сдвига находится на ней и интеграл $K_y = 0$. При двух осях симметрии точка их пересечения совпадает с центром сдвига.

В качестве иллюстрации укажем значения рассмотренных геометрических характеристик и координаты центра сдвига для открытого профиля, очерченного по дуге окружности (фиг. 53).

Совместив начало координат с центром дуги и проведя ось y через ее середину (вспомогательная координатная система), после интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} I_p &= 2R^3 h \beta; & K_y &= -2R^2 h \sin \beta \\ L_x &= \frac{1}{2} (2\beta - \sin 2\beta) Rh; & L_y &= \frac{1}{2} (2\beta + \sin 2\beta) Rh. \end{aligned}$$

Величины K_y и L_{xy} обращаются в нуль, так как ось y является осью симметрии. Пользуясь формулой (40), находим координаты центра сдвига

$$a_c = 0, \quad b_c = \frac{4 \sin \beta}{2\beta + \sin 2\beta} R.$$

Тогда $I_{p \min}$ определяется формулой

$$I_{p \min} = 2 \left(\beta - \frac{4 \sin^2 \beta}{2\beta + \sin 2\beta} \right) R^3 h,$$

и длина радиуса, проведенного из центра сдвига, будет

$$r_c(s) = \left(1 - \frac{4 \sin \beta}{2\beta + \sin 2\beta} \cos \varphi \right) R.$$

Рассмотрим теперь свойства встречающихся в дальнейшем изложении геометрических характеристик

$$F(s) = \int_0^s h ds,$$

$$S_x(s) = \int_0^s y h ds, \quad S_y(s) = \int_0^s x h ds,$$

$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega h ds, \quad I_{yx} = \int_0^s x y h ds,$$

$$I_x = \int_0^s y^2 h ds, \quad S_{x\omega} = \int_0^s \omega x h ds,$$

$$S_{y\omega} = \int_0^s \omega y h ds, \quad I_y = \int_0^s x^2 h ds.$$

Будем считать, что начало отсчета дуги $s = 0$ совпадает с одним из краев стержня, если он имеет открытое сечение, и с произвольной точкой, если сечение закрытое.

Интеграл $F(s) = \int_0^s h ds$ представляет собой площадь части поперечного сечения, ограниченной линиями $s = 0$ и $s = \text{const}$; при $s = l$ он представляет площадь всего поперечного сечения.

Величины $S_x(s)$, $S_y(s)$ являются статическими моментами упомянутой части сечения, а интегралы $I_x(s)$, $I_y(s)$ — моментами инерции. По аналогии S_ω называют секториальным статическим моментом, а $I_{x\omega}(s)$, $I_{y\omega}(s)$, $I_\omega(s)$ — секториальными моментами инерции.

Выбирая за оси координат главные центральные оси сечения и вводя главную секториальную площадь со специально подобранным полюсом, добиваемся в случае стержней с открытым профилем удовлетворения условий

$$\begin{aligned} S_x(l) = 0, \quad S_y(l) = 0, \quad S_\omega(l) = 0, \\ I_{xy}(l) = 0, \quad I_{x\omega}(l) = 0, \quad I_{y\omega}(l) = 0, \end{aligned}$$

которые вместе с очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} S_x(0) = 0, \quad S_y(0) = 0, \quad S_\omega(0) = 0, \\ I_{xy}(0) = 0, \quad I_{x\omega}(0) = 0, \quad I_{y\omega}(0) = 0, \end{aligned}$$

позволяют в дальнейшем значительно упростить вычисления.

§ 3. Определение касательных напряжений в сечениях стержня, остающихся плоскими при его деформации

В § 1 настоящей главы была отмечена возможность определения касательных напряжений в сечениях стержня, остающихся плоскими при его деформации, без нахождения функции напряжений и перемещений $\Phi(z, s)$.

Так как в сечении $z = 0$, остающимся плоским, перемещение $w = 0$ и соответственно $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$, то касательное напряжение в этом сечении согласно формуле (6) определяется соотношением:

$$\tau_{zs} = \mu [\dot{\theta} r + \dot{\xi}_0 x' + \dot{\eta}_0 y'] \quad (42)$$

Подставляя (42) в три интегральных уравнения равновесия, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_0(0) L_y + \dot{\eta}_0(0) L_{xy} + \dot{\vartheta}(0) K_y &= \frac{Q_x(0)}{\mu}, \\ \dot{\xi}_0(0) L_{xy} + \dot{\eta}_0(0) L_x + \dot{\vartheta}(0) K_x &= \frac{Q_y(0)}{\mu}, \\ \dot{\xi}_0(0) K_y + \dot{\eta}_0(0) K_x + \left(\frac{C}{\mu} + I_p\right) \dot{\vartheta}(0) &= \frac{M_z(0)}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Если оси x, y совместить с главными осями сдвига, то как было указано в § 2,

$$L_{xy} = K_x = K_y = 0,$$

и система (43) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_0(0) L_y &= \frac{Q_x(0)}{\mu}, \\ \dot{\eta}_0(0) L_x &= \frac{Q_y(0)}{\mu}, \\ \left(\frac{C}{\mu} + I_p\right) \dot{\vartheta}(0) &= \frac{M_z(0)}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Находя отсюда производные $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\vartheta}$ и подставляя их значения в (42), имеем:

$$\tau_{zs} = x' \frac{Q_x(0)}{L_y} + y' \frac{Q_y(0)}{L_x} + r \frac{M_z(0)}{\left(\frac{C}{\mu} + I_p\right)}. \quad (45)$$

Если воспользоваться этой формулой для случая кручения ($Q_x = 0$, $Q_y = 0$) и пренебречь жесткостью при свободном кручении C , то получим формулу В. Н. Беляева

$$\tau_{zs} = \frac{M_z(0)}{I_p} r, \quad (46)$$

которая была им установлена на основании аналогии рассматриваемой задачи с задачей В. Г. Шухова (задача о распределении касательных усилий в болтовом соединении при действии крутящего момента).

Прежде чем рассмотреть применение формулы (46), изучим вопрос о законности пренебрежения жесткостью свободного кручения C .

Для этого остановимся на примере стержня, средняя линия сечения которого представляет дугу окружности.

Как было указано в § 2, величина I — направленный момент инерции — определяется формулой

$$I = 2 \left[\beta - \frac{4 \sin^2 \beta}{2\beta + \sin 2\beta} \right] R^3 h.$$

Жесткость свободного кручения найдем по известной формуле

$$\frac{C}{\mu} = \frac{1}{3} \int_0^l h^3 ds = \frac{2}{3} \beta R h^3.$$

Поэтому отношение слагаемых в знаменателе последнего члена формулы (45) в данном случае составит

$$\frac{C}{\mu I} = \frac{h^2}{3R^2} \frac{\beta}{\beta - \frac{4 \sin^2 \beta}{2\beta + \sin 2\beta}} = \frac{h^2}{R^2} f(\beta).$$

При малых значениях угла β , используя разложение

$$\beta - \frac{4 \sin^2 \beta}{2\beta + \sin 2\beta} = \frac{1}{45} \beta^5 + \dots,$$

приближенно получаем

$$\frac{C}{\mu I} = \frac{15h^2}{R^2} \frac{1}{\beta^4}.$$

Таким образом при достаточно малых значениях $R\beta$ жесткостью C пренебрегать нельзя. Нужно заметить, однако, что при малых значениях $R\beta$ теория становится несостоятельной по той причине, что *стержень в этом случае нельзя считать тонкостенным*, ибо длина средней линии сечения становится мало отличающейся от толщины h .

Иное положение имеет место при больших значениях угла β . Например, при $\beta = 90^\circ$ имеем:

$$\frac{C}{\mu I} = \frac{h^2}{3R^2} \cdot 5,29 = 1,764 \frac{h^2}{R^2},$$

что при $\frac{h}{R} = 0,1$ составляет менее 0,02.

Аналогично для швеллера будет

$$\frac{C}{\mu I} = \frac{2}{3} \frac{h^2}{B^2} \left(2 + \frac{B}{H} \right).$$

При $\frac{B}{H} = 2$ и $\frac{h}{B} = 0,1$ имеем $\frac{C}{\mu I} = 0,027$.

Из этих примеров ясно видно, что в обычных случаях можно без внесения заметной ошибки пренебречь геометрической жесткостью свободного кручения по сравнению с направленным моментом инерции I .

Перейдем теперь к вопросу о положении центра кручения вблизи заделки. Из формул (44) видно, что при $Q_x = Q_y = 0$ имеют место соотношения $\xi_0(0) = \eta_0(0) = 0$. Это обозначает, что центр сдвига сечения, бесконечно близкого к заделке, при повороте этого сечения остается неподвижным и, следовательно, является истинным центром кручения.

Сопоставляя найденные в предыдущем параграфе координаты центра сдвига с координатами центра кручения, определенными по прикладной теории для открытых стержней, замечаем резкое различие положения обеих точек.

Особенно значительным оказывается это различие в случае круглой трубы с продольным разрезом. Согласно теории В. З. Власова центр кручения находится в этом случае вне контура сечения, на расстоянии $2R$ от геометрического центра окружности, тогда как центр сдвига, являющийся вблизи заделанного сечения истинным центром кручения, совпадает с геометрическим центром окружности.

Имея в виду, что с удалением от заделки прикладная теория тонкостенных стержней с открытыми профилями дает все более точные результаты, следует признать, что в достаточном удалении от заделки действительный центр кручения будет близок к определяемому по прикладной теории.

Из сказанного следует, что *действительная ось кручения стержня должна представлять собой кривую линию.*

Значительно меньшее различие мы обнаружим, если сопоставим положение центра кручения, определяемого прикладной теорией для закрытых профилей, с положением центра истинного кручения вблизи заделки,

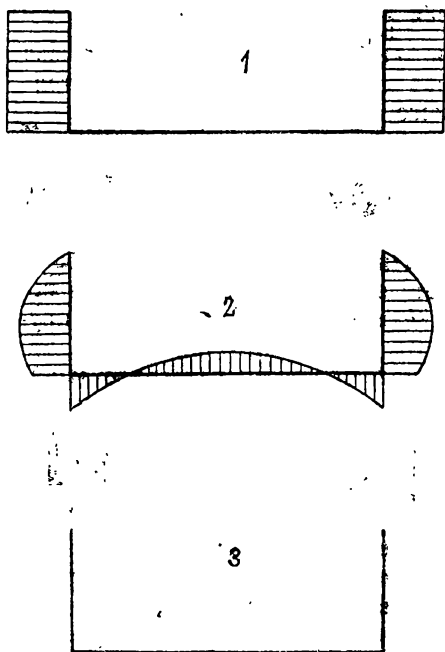
Располагая формулой (45), дающей значение касательных напряжений в заделке по уточненной теории, сравним на примерах результаты точной теории (1) с результатами прикладных теорий (2) и с решением задачи Сен-Венана (3). Разумеется, что говорить о при-

менении результатов теории Сен-Венана в заданном сечении можно лишь в условном смысле для целей сравнения.

На фиг. 54 показано распределение при кручении напряжений τ_{zs} в заделке для случая швеллерного сечения по всем трем теориям, а на фиг. 55 приведены аналогичные эпюры для коробчатого сечения.

Сравнение результатов показывает, что различие между ними в заделанном сечении значительно.

Отсюда наряду с тривиальным заключением о непригодности решения Сен-Венана вблизи заделанных сечений



Фиг. 54.

следует и вывод о недостаточной точности результатов прикладных теорий в заделанном сечении (по крайней мере, в отношении касательных напряжений τ_{zs} и координат центра кручения).

Следует отметить, однако, что справедливость рассматриваемой в этой главе общей теории связана с необходимостью обеспечения при деформации неизменяемости контура. Чрезмерность этой гипотезы вблизи заделки приводит к нарушению парности касательных напряжений в крайних точках

заделанного сечения стержня с открытым профилем и к обращению в бесконечность производной $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ в тех точках сечения, где величина r меняется на конечную величину (углы).

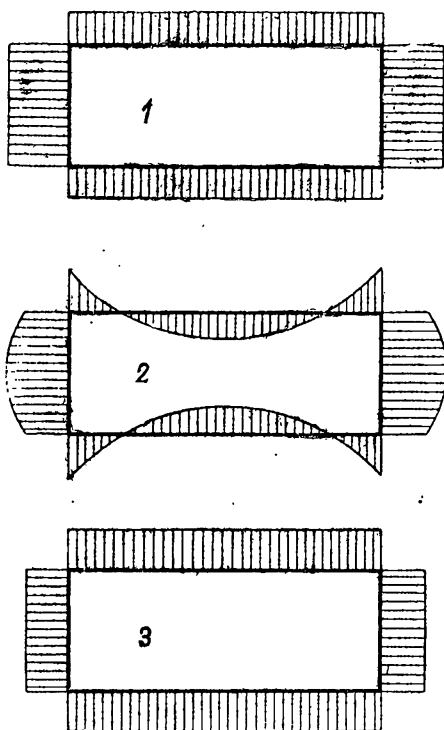
Впрочем, с подобными особенностями решений приходится нередко встречаться в задачах теории упругости при специально поставленных граничных условиях.

Любопытно отметить, что в изложенных выше прикладных теориях указанные особенности распределения касательных напряжений τ_{zs} вовсе не выявляются. Это объясняется тем, что по сути исходных гипотез в этих теориях касательные напряжения τ_{zs} определяются не по величинам деформаций, а из условия равновесия, так что невозможно нарушение последних*, вызываемое в уточненной теории необходимостью соблюдения уравнений неразрывности.

§ 4. Задачи, сводящиеся к решению задачи Сен-Венана для тонкостенного стержня

Задача, рассмотренная в предыдущем параграфе, не является единственной, допускающей весьма простое реше-

* Напомним, что парность касательных напряжений есть следствие уравнений статики.



Фиг. 55.

ние в рамках общей теории. Ниже будут рассмотрены задачи, которые сводятся к решению задачи Сен-Венана, поставленной для тонкостенного стержня. Прежде всего, остановимся на вопросе о том, с какой точностью определяются перемещения w , ξ_0 , η_0 , ϑ заданием напряжений σ_z и τ_{zs} . Ответом на аналогичный вопрос в теории упругости служит утверждение, что перемещения определяются по заданным напряжениям с точностью до перемещения тела как твердого.

Несколько иначе обстоит дело в рассматриваемой задаче. Действительно, найдем перемещения w^* , ξ_0^* , η_0^* , ϑ^* , отвечающие нулевым напряжениям. Полагая в выражениях:

$$\sigma_z = \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{zs} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \dot{\vartheta} r + \dot{\xi}_0 x' + \dot{\eta}_0 y' \right),$$

напряжения τ_{zs} и σ_z равными нулю, имеем после интегрирования второго уравнения:

$$w^* = -\dot{\vartheta}^* \omega - \dot{\xi}_0^* x - \dot{\eta}_0^* y + D_0^*$$

(D_0^* — произвольная постоянная) и после подстановки этого результата в первое уравнение:

$$-\ddot{\vartheta}^* \omega - \ddot{\eta}_0^* y - \ddot{\xi}_0^* x = 0,$$

откуда

$$\ddot{\vartheta}^* = \ddot{\eta}_0^* = \ddot{\xi}_0^* = 0,$$

т. е.

$$\xi_0^* = A_0 + A_1 z; \quad \eta_0^* = B_0 + B_1 z; \quad \vartheta^* = C_0 + C_1 z \quad (47)$$

и

$$w^* = -C_1 \omega - A_1 x - B_1 y + D_0^*. \quad (48)$$

Выражения (47) и (48), определяющие перемещения, соответствующие отсутствию напряжений σ_z и τ_{zs} , содержат в общем случае семь постоянных

$$A_0, B_0, C_0, D_0^*, A_1, B_1, C_1.$$

Однако для стержня с закрытым профилем перемещение w^* должно удовлетворять условию периодичности; так

как при обходе контура приращение получает только секториальная площадь, то постоянная C_1 обращается в нуль.

Из сказанного следует, что в случае стержня с закрытым профилем перемещения w^* , ξ_0^* , η_0^* , ϑ^* образуют систему перемещений твердого тела:

$$\begin{aligned}w^* &= -A_1x - B_1y + D_0; \\ \xi_0^* &= A_0 + A_1z; \quad \eta_0^* = B_0 + B_1z; \\ \vartheta^* &= C_0.\end{aligned}$$

определяемую шестью постоянными.

В то же время для стержня с открытым профилем перемещения w^* , η_0^* , ξ_0^* , ϑ^* определяются *семью постоянными, что свидетельствует о возможности такой деформации стержня, при которой срединная поверхность не испытывает сдвигов и удлинений*.

Пример такой деформации дает решение задачи Сен-Венана о свободном кручении тонкостенного стержня с открытым профилем. Как известно, в этом случае деформация стержня происходит без сдвигов и удлинений срединной поверхности.

Сказанное приводит к заключению о наличии семи степеней свободы у стержня с открытым профилем. Ясно, однако, что далеко не всегда системе перемещений w^* , η_0^* , ξ_0^* , ϑ^* отвечает полное отсутствие напряжений в стержне (ибо перемещения w^* , η_0^* , ξ_0^* , ϑ^* получены в предположении отсутствия лишь напряжений σ_z и τ_{zs}). В только что упомянутой задаче Сен-Венана напряжения, вообще говоря, отличны от нуля (хотя $\sigma_z = 0$ и $\tau_{zs} = 0$); поэтому седьмая степень свободы существенно отличается от шести степеней свободы, определяющих перемещение тела как твердого, и наличие этой степени свободы не означает внутренней изменяемости незакрепленного стержня.

Если, однако, пренебречь жесткостью свободного кручения и считать, что напряжениями σ_z и τ_{zs} полностью описывается его напряженное состояние ($\bar{M}_z = 0$), то стержень действительно становится системой, обладающей семью степенями свободы; перемещения такого стержня в пространстве определяются не только шестью параметрами, соответ-

ствующими перемещению твердого тела, но и одним параметром, характеризующим внутреннюю изменяемость стержня.

Ясно поэтому, что в таком случае для закрепления стержня необходимо наложение дополнительной внешней связи, сверх шести, нужных для закрепления твердого тела.

Этот, по существу, кинематический анализ тесно связан со статическим рассмотрением аналогичной задачи, данным в гл. I. Там была установлена необходимость дополнительного интегрального уравнения равновесия для стержней с открытым профилем при исчезающей жесткости свободного кручения (сверх интегральных уравнений, отвечающих равновесию стержня как целого).

Выше неоднократно отмечалась естественность пренебрежения жесткостью свободного кручения при решении задач о стесненном кручении.

Рассмотрим некоторые простейшие случаи равновесия стержня с открытым профилем, полагая жесткость C равной нулю.

Пусть тонкостенный призматический стержень находится в условиях нагружения, соответствующих задаче Сен-Венана; на торце стержня $z=L$ приложены: крутящий момент M_z и перерезывающие силы (Q_x) , $(Q_y)^*$. Другой конец стержня будем считать закрепленным в смысле устранения перемещений ξ , η , ϑ в сечении $z=0$, а также перемещений w и производных $\frac{\partial w}{\partial s}$ в двух точках этого сечения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0(0) &= 0, & \eta_0(0) &= 0, & \vartheta(0) &= 0, \\ w(0,0) &= 0, & \frac{\partial w}{\partial s}(0,0) &= 0, & w(0,l) &= 0, \\ & & \frac{\partial w}{\partial s}(0,l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Число этих граничных условий совпадает с числом констант, определяющих перемещения открытого стержня, для которого $C=0$.

Разумеется, что вместо этих условий могут быть поставлены и иные. При этом важно отметить, что та или иная

* Таким образом рассматривается вырожденная задача Сен-Венана.

формулировка семи граничных условий для перемещений делает задачу нахождения перемещений w , ξ_0 , η_0 , ϑ определенной, причем, в соответствии со сказанным, *распределение напряжений σ_z и τ_{zs} остается неизменным*. Вместо граничных условий (49) можно определить закрепление формулами:

$$w(0,0)=0, \quad \xi_0(0)=\eta_0(0)=0, \quad \vartheta(0)=0, \\ \int_0^l w(0,s) ds = 0, \quad \int_0^l w(0,s) x ds = 0, \quad \int_0^l w(0,s) y ds = 0.$$

Последние три условия обозначают отсутствие в среднем перемещения $w(0,s)$ и его моментов.

Вместо семи граничных условий для перемещений могут быть поставлены семь граничных условий для сил (шесть из них соответствуют интегральным уравнениям равновесия стержня как твердого тела и седьмое относится к равновесию бимоментов). При этом перемещения w , ξ_0 , η_0 , ϑ будут найдены лишь с точностью для семи постоянных.

Опуская довольно громоздкие, но принципиально простые выкладки, приведем окончательные результаты решения задачи Сен-Венана для тонкостенного стержня:

$$\tau_{zs} = -\frac{1}{h} \left[\frac{M_z}{I_{\bar{\omega}}} S_{\bar{\omega}}(s) + \frac{Q_x}{I_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{I_x} S_x(s) \right], \quad (50)$$

$$\sigma_z = - \left[\frac{M_z}{I_{\bar{\omega}}} \bar{\omega} + \frac{Q_x}{I_y} x + \frac{Q_y}{I_x} y \right] (L-z), \quad (51)$$

$$w = - \left[\frac{M_z}{EI_{\bar{\omega}}} \bar{\omega} + \frac{Q_x}{EI_y} x + \frac{Q_y}{EI_x} y \right] \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) - \\ - \frac{1}{k^2 E} \left\{ \frac{M_z}{I_{\bar{\omega}}} \int_0^s \frac{ds}{h} \int_0^s \bar{\omega} h dt + \frac{Q_x}{I_y} \int_0^s \frac{ds}{h} \int_0^s x h dt + \right. \\ \left. + \frac{Q_y}{I_x} \int_0^s \frac{ds}{h} \int_0^s y h dt \right\} - A_1 \bar{\omega} - B_1 x - C_1 y - D, \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= A_0 + A_1 z - \frac{M_z}{6EI_\omega} [z^3 - 3Lz^2], \\ \xi_0 &= B_0 + B_1 z - \frac{Q_x}{6EI_y} [z^3 - 3Lz^2], \\ \eta_0 &= C_0 + C_1 z - \frac{Q_y}{6EI_x} [z^3 - 3Lz^2]. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Здесь все величины вычислены относительно главных центральных осей инерции сечения.

Семь постоянных, входящих в выражения для перемещений $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, D$, должны быть определены из поставленных выше условий на торцах.

Необходимо отметить совпадение формул (50) и (51) с результатами решения задачи о нагружении консольного тонкостенного стержня силами Q_x, Q_y и моментом M_z по прикладной теории. Это совпадение поясняет, какому случаю нагружения и закрепления тонкостенного стержня соответствует результат прикладной теории. Ясно, что лишь при наложении не более семи связей на заделанное сечение, результат (50—53) является строгим; при наложении условия $w(0, s) = 0$, принятого в соответствующей задаче прикладной теории, формулы (50) и (51) в строгой теории не будут иметь места.

Удовлетворение граничному условию $w(0, s) = 0$ в прикладной теории, при сохранении формул для напряжений (50) и (51), *оказывается возможным вследствие нарушения соответствия между τ_{zs} и γ_{zs}* .

§ 5. О решении задачи в случае произвольных граничных условий

Для построения решения основного уравнения (21) при произвольных условиях закрепления и загрузки удобно использовать два метода.

С одной стороны, можно попытаться найти частное решение уравнения с правой частью и затем, накладывая на него построенное по методу Фурье решение однородного интегро-дифференциального уравнения, соответствующего (21), добиться удовлетворения граничных условий.

Другой возможный путь состоит в нахождении сначала собственных функций однородного уравнения и в разыскании затем решения неоднородного уравнения в виде ряда по этим функциям.

Ниже мы проиллюстрируем первый путь на конкретном примере задачи о кручении консольного стержня коробчатого профиля, обладающего двумя осями симметрии (§ 6), и затем в общих чертах рассмотрим второй путь уже для общей задачи (§ 7). Детальное изложение последнего решения дано в работах Р. А. Ададунова, к которым мы и отсылаем читателя.

§ 6. Решение задачи о стесненном кручении тонкостенных стержней с закрытым профилем, обладающих двумя осями симметрии

Изложенная в § 1 теория кручения и изгиба тонкостенных стержней касалась общего случая загрузки и закрепления тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей.

В настоящем параграфе будет рассмотрена частная задача о стесненном кручении консольного тонкостенного стержня с закрытым профилем моментом M_z , приложенным на его торце. При этом предполагается, что стержень обладает двумя осями симметрии и поэтому центр сдвига совпадает с точкой пересечения этих осей и с центром тяжести; толщина стенки h будет считаться постоянной.

При этом мы составим интегро-дифференциальное уравнение для перемещения w — на общем ходе выкладок в нашей задаче это скажется незначительно, ибо $w = \frac{1}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial s}$.

Так как вследствие симметрии сечения $\xi_0 = \eta_0 = 0$, то формулы (5) и (6) принимают вид:

$$\sigma_z = \bar{E} \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (54)$$

$$\tau_{zs} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial s} + r \dot{\Phi} \right). \quad (55)$$

Подставляя (54) и (55) в дифференциальное уравнение статики, получим

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \dot{\Phi} \frac{dr}{ds} = 0, \quad (56)$$

где

$$k^2 = \frac{m-1}{2m}.$$

Из третьего интегрального уравнения статики установим связь между углом поворота ϑ и крутящим моментом M_z в поперечном сечении $z = \text{const}$:

$$\oint \tau_{zs} h r ds = M_z.$$

Подставив в эту формулу выражение τ_{zs} из (55), получим

$$\mu \oint \left(\frac{\partial w}{\partial s} + r \dot{\vartheta} \right) r h ds = M_z,$$

или

$$\dot{\vartheta} = \frac{M_z}{\mu I_p} - \frac{h}{I_p} \oint \frac{\partial w}{\partial s} r ds, \quad (57)$$

где попрежнему

$$I_p = \oint r^2 h ds.$$

Теперь, используя (57), можно исключить $\dot{\vartheta}(z)$ из уравнения (56); это дает основное уравнение для определения перемещения $w(z, s)$:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{h}{I_p} \frac{dr}{ds} \oint \frac{\partial w}{\partial s} r ds = - \frac{M_z}{\mu I_p} \frac{dr}{ds}. \quad (58)$$

В соответствии с упомянутым в § 5 первым методом решения задачи будем искать решение этого уравнения в форме

$$w = w_0 + w_1,$$

где w_0 — перемещение в задаче о свободном кручении, которое, соответственно результату, данному в § 1 гл. III, мы примем в виде

$$w_0 = - \frac{M}{C} \bar{\omega} = - \frac{M}{C} \left(\omega - \Omega \frac{s}{l} \right),$$

где $C = \frac{\mu \Omega^2 h}{l}$ — жесткость при свободном кручении, $\bar{\omega}$ — обобщенная главная секториальная площадь.

Тогда

$$w = w_1 - \frac{M}{C} \left(\omega - \Omega \frac{s}{l} \right) \quad (59)$$

и, подставляя (59) в (58), имеем для w_1 однородное уравнение

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} - \frac{h}{I_p} \frac{dr}{ds} \oint \frac{\partial w_1}{\partial s} r ds = 0. \quad (60)$$

Однородность этого уравнения обозначает, что системе перемещений w_1 отвечают напряжения, статически эквивалентные нулю, ибо интегральные уравнения равновесия удовлетворены напряжениями, соответствующими системе перемещений w_0 .

Для построения общего решения уравнения (60) применим метод Фурье. Будем искать систему частных решений, имеющих следующий вид:

$$w_1(z, s) = g(z) W(s), \quad (61)$$

где g и W являются функциями переменных z и s , соответственно.

При подстановке (61) в (60) имеем:

$$\frac{1}{k^2} \ddot{g} W + W'' g - \frac{h}{I_p} r' g \oint r W' ds = 0. \quad (62)$$

Уравнению (62) можно придать вид

$$\frac{\ddot{g}}{k^2 g} = - \frac{W''' - \frac{hr'}{I_p} \oint r W' ds}{W}. \quad (63)$$

Поскольку левая часть (63) зависит только от координаты z , а правая — только от координаты s , то равенство (63) возможно лишь, если каждая из его частей постоянна. Обозначая эту постоянную делением через λ^2 , получим вместо (63) два уравнения

$$\ddot{g} - \lambda^2 k^2 g = 0, \quad (64)$$

$$W'' + \lambda^2 W - \frac{h}{I_p} r' \oint r W' ds = 0. \quad (65)$$

К исследованию уравнения (64) мы обратимся ниже, а сейчас рассмотрим решение уравнения (65). Нахождение решения такого интегрально-дифференциального уравнения весьма облегчается тем обстоятельством, что входящий в последний член интеграл является неизвестным постоянным числом,

Поэтому, если ввести в качестве неизвестной постоянной значение этого интеграла T , то уравнение (65) сводится к системе двух уравнений

$$W'' + \lambda^2 W = Tr', \quad (66)$$

$$\frac{h}{l_p} \oint r W' ds = T. \quad (67)$$

В дифференциальном уравнении (66) правая часть является заданной функцией дуги s . Периодическое решение этого уравнения имеет вид

$$W(s) = \frac{T}{\lambda} \left[\frac{1}{2\lambda \sin \frac{l}{2}} \int_0^l r'(t) \cos \lambda \left(s + \frac{l}{2} - t \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^s r'(t) \sin \lambda (s - t) dt \right]. \quad (68)$$

Соотношение (67) после интегрирования по частям принимает вид

$$- \frac{h}{l_p} \oint r' W ds = T$$

или после подстановки выражения W

$$T \left\{ \frac{1}{2\lambda \sin \frac{l}{2}} \oint \oint r'(t) r'(s) \cos \lambda \left(s + \frac{l}{2} - t \right) dt ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} \oint \left[\int_0^s r'(t) \sin \lambda (s - t) dt \right] r'(s) ds + \frac{l_p}{h} \right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\lambda \sin \frac{l}{2}} \oint \oint r'(t) r'(s) \cos \lambda \left(s + \frac{l}{2} - t \right) dt ds + \\ & + \oint \left[\int_0^s r'(t) \sin \lambda (s - t) dt \right] r'(s) ds + \frac{l_p \lambda}{h} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

так как в задаче о кручении интеграл

$$T = \oint \frac{\partial W}{\partial s} r ds$$

не может равняться нулю. *

Таким образом, для данной задачи существует система характеристических чисел, являющихся корнями уравнения (69), и соответствующих им фундаментальных функций, данных выражением (68), которому придадим вид

$$W_i(s) = \frac{T_i}{2\lambda_i \sin \lambda_i \frac{l}{2}} \int_s^{s+l} r'(t) \cos \lambda_i \left(s + \frac{l}{2} - t\right) dt.$$

Постоянные T_i надлежит определить из условий нормирования

$$\oint W_i^2(s) ds = 1.$$

На доказательстве ортогональности полученной системы функций мы не останавливаемся. Она является следствием более общего свойства, рассмотренного ниже в § 7.

Интегрируя (64), имеем

$$g(z) = D \operatorname{sh} \lambda_k z + E \operatorname{ch} \lambda_k z.$$

Поэтому функция w_1 может быть представлена в форме ряда

$$w_1(z, s) = \sum_{i=1}^{\infty} (D_i \operatorname{sh} \lambda_i kz + E_i \operatorname{ch} \lambda_i kz) W_i(s).$$

* В противном случае обратится в нуль правая часть уравнения (66). Соответствующая система собственных функций

$$w = A \sin \lambda s + B \cos \lambda s$$

отвечает задаче о деформации стержня, не сопровождающейся смещениями и поворотами поперечных сечений ($\xi_0 = \eta_0 = \vartheta = 0$),

Разложим решение задачи Сен-Венана в ряд по функциям W_i *. Для этого запишем w_0 в форме ряда

$$w_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_i(s). \quad (70)$$

Умножаем обе части (70) на W_i и, интегрируя по координате s , имеем

$$A_i = \frac{\oint w_0 W_i ds}{\oint W_i^2 ds} = \oint w_0 W_i ds.$$

Вспоминая, что

$$w_0 = -\frac{M}{C} \left(\omega - \Omega \frac{s}{l} \right),$$

имеем

$$A_i = -\frac{M}{C} \oint \left(\omega - \Omega \frac{s}{l} \right) W_i ds. \quad (71)$$

Таким образом, выражение для искомого перемещения $w = w_0 + w_1$ может быть записано в форме ряда

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + D_i \operatorname{sh} \lambda_i k z + E_i \operatorname{ch} \lambda_i k z) W_i(s). \quad (72)$$

Постоянные D_i и E_i должны быть определены из граничных условий на концах стержня. Рассмотрим их нахождение в случаях основных типов граничных условий.

1. Оба конца стержня зашпелены; при $z = 0$ и $z = L$ $w = 0$.

Тогда из (72) имеем

$$A_i + E_i = 0,$$

$$A_i + D_i \operatorname{sh} \lambda_i k L + E_i \operatorname{ch} \lambda_i k L = 0,$$

* Здесь предполагается возможность подобного представления, особенностью которого служит разложение перемещений w_0 , возникающих от системы сил, статически не эквивалентной нулю, по перемещениям w_1 , вызванным самоуравновешенными нагрузками. Замечим, что для самих нагрузок подобное разложение было бы лишено смысла.

откуда

$$\begin{aligned} E_i &= -A_i, \\ D_i &= -A_i \operatorname{th} \lambda_i \frac{kL}{2}. \end{aligned}$$

2. Один конец стержня зажат ($z=0$), другой конец свободен ($z=L$). Граничные условия:

$$\text{при } z=0 \quad w=0, \quad \text{при } z=L \quad \frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Первое условие даст соответственно (72)

$$A_i + E_i = 0,$$

следовательно, как и в предыдущем случае,

$$E_i = -A_i.$$

Для использования второго граничного условия дифференцируем (72) по координате z :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} (D_i \operatorname{ch} \lambda_i kz + E_i \operatorname{sh} \lambda_i kz) \lambda_i k W_i(s).$$

Тогда указанное условие приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (D_i \operatorname{ch} \lambda_i kL - A_i \operatorname{sh} \lambda_i kL) \lambda_i W_i(s) = 0.$$

Эта сумма обращается в нуль при любом значении s , только если равняется нулю каждая из скобок

$$D_i \operatorname{ch} \lambda_i kL - A_i \operatorname{sh} \lambda_i kL = 0.$$

Отсюда находим для второй постоянной

$$D_i = A_i \operatorname{th} \lambda_i kL.$$

Теперь решение (72) будет

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} A_i (1 + \operatorname{th} \lambda_i kL \operatorname{sh} \lambda_i kz - \operatorname{ch} \lambda_i kz) W_i(s). \quad (73)$$

2а. Полубесконечный стержень. Конец $z=0$ — зажат, конец $z=\infty$ — свободен. Решение может быть получено из (73)

после подстановки $L = \infty$. При этом $\text{th } \lambda_i k L = 1$, и (73) принимает вид

$$\varpi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i (1 - e^{-\lambda_i k s}) W_i(s).$$

3. Внешний крутящий момент приложен не на конце стержня, а в промежуточном сечении z_1 ($0 < z_1 < L$). Конец $z = 0$ зашлемлен, конец $z = L$ свободен.

Перемещения на первом участке будем попрежнему обозначать через ϖ ; перемещения на втором участке — через $\overline{\varpi}$. Разделим мысленно стержень на две части: к первой части приложим на конце крутящий момент, тогда вторая часть не испытывает действия крутящих моментов, но при $z = z_1$ ее перемещения $\overline{\varpi}$ должны обращаться в ϖ при любом значении s .

Тогда для первого участка

$$\text{при } z = 0 \quad \varpi = 0$$

и для второго участка

$$\text{при } z = L \quad \frac{\partial \overline{\varpi}}{\partial z} = 0.$$

Кроме того, для непрерывности продольных перемещений и нормальных напряжений σ_z должна быть обеспечена непрерывность как функции ϖ , так и ее первой производной $\frac{\partial \varpi}{\partial z}$ при переходе через сечение $z = z_1$:

$$\varpi = \overline{\varpi},$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial z} = \frac{\partial \overline{\varpi}}{\partial z}.$$

Эти четыре условия позволяют получить четыре системы уравнений для коэффициентов D_i , E_i (для первого участка) и коэффициентов \overline{D}_i , \overline{E}_i (для второго участка),

Соответствующие зависимости имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + E_i) W_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k (\bar{D}_i \operatorname{ch} \lambda_i L + \bar{E}_i \operatorname{sh} \lambda_i k L) W_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^{\infty} [A_i + D_i \operatorname{sh} \lambda_i k z_1 + E_i \operatorname{ch} \lambda_i k z_1] W_i &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [\bar{D}_i \operatorname{sh} \lambda_i k z_1 + \bar{E}_i \operatorname{ch} \lambda_i k z_1] W_i; \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k [D_i \operatorname{ch} \lambda_i k z_1 + E_i \operatorname{sh} \lambda_i k z_1] W_i &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k [\bar{D}_i \operatorname{ch} \lambda_i k z_1 + \bar{E}_i \operatorname{sh} \lambda_i k z_1] W_i. \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений находим:

$$D_i = A_i (\operatorname{sh} \lambda_i k z_1 - 2 \operatorname{th} \lambda_i k L \operatorname{sh}^2 \lambda_i \frac{k z_1}{2});$$

$$E_i = -A_i;$$

$$D_i = -2A_i \operatorname{th} \lambda_i k L \operatorname{sh}^2 \lambda_i \frac{k z_1}{2};$$

$$\bar{E}_i = 2A_i \operatorname{sh}^2 \lambda_i \frac{k z_1}{2}.$$

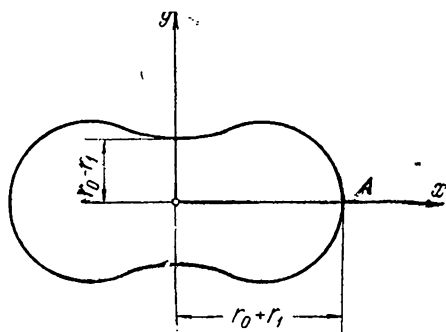
Последний результат имеет большое практическое значение: им до конца решается вопрос о функции w при действии единичного крутящего момента, приложенного в произвольном сечении z_1 . Если обозначить эту функцию через $w^*(z, s, z_1)$, то при одновременном действии крутящих моментов в сечениях z_1, z_2, \dots решение будет

$$w = \sum_{i=1}^k M_i w^*(z, s, z_i). \quad (74)$$

При непрерывно распределенных крутящих парах последнее решение принимает форму:

$$\dot{w}(z, s) = \int_0^L m(t) w^*(z, s, t) dt.$$

Таким образом, функция $w^*(z, s, t)$ оказывается функцией Грина рассматриваемой задачи. Располагая этой функцией, можно сразу записать решение при произвольном распределении крутящих моментов.



Фиг. 56.

Аналогично можно получить формулу и для случая, когда внешний крутящий момент приложен в сечении z_1 , а сечения $z = 0$ и $z = L$ зашлемлены.

В качестве первого примера рассмотрим решение задачи о кручении консольного стержня, контур сечения которого показан на фиг. 56 и удовлетворяет уравнению

$$r = r_0 + r_1 \cos \frac{4\pi s}{l}.$$

Начало отсчета дуг принято в точке A. Обозначив через l длину контура, найдем для площади, ограниченной этим контуром:

$$\frac{1}{2} \Omega = \frac{1}{2} \oint r ds = \frac{1}{2} r_0 l,$$

и для направленного момента инерции:

$$I_p = hl \left(r_0^2 + \frac{1}{2} r_1^2 \right).$$

Решение задачи Сен-Венана согласно (59) имеет вид

$$w_0(s) = -\frac{Mr_1}{4\pi\mu hr_0^2} \sin \frac{4\pi s}{l}. \quad (75)$$

В соответствии с (68) находим для фундаментальной функции

$$W_i(s) = -\frac{4\pi r_1}{I_p l} \frac{\sin \frac{4\pi s}{l}}{\left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 - \lambda^2}. \quad (76)$$

Характеристическое уравнение возьмем в форме (69); в нашем случае оно приводится к виду:

$$\left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 \frac{r_1^2 h}{I_p} \frac{1}{\left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 - \lambda^2} \oint \sin^2 \frac{4\pi s}{l} ds = 1$$

и имеет своим единственным решением:

$$\lambda^2 = \left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{r_1^2}{2r_0^2}\right)^{-1}. \quad (77)$$

Решение (75) может быть представлено с помощью (76) в виде

$$w_0(s) = AW(s),$$

где

$$A = \frac{Mr_1^2}{2\mu hr_0^2}.$$

Таким образом

$$w = -\frac{Mr_1}{4\pi\mu hr_0^2} \sin \frac{4\pi s}{l} (1 + \operatorname{th} \lambda kL \cdot \operatorname{sh} \lambda kz - \operatorname{ch} \lambda kz).$$

Для нормальных напряжений в заделке ($z=0$) находим

$$\sigma_z(0, s) = -\frac{Mr_1 \lambda \operatorname{th} \lambda kL}{4k\pi hr_0^2} \sin \frac{4\pi s}{l}.$$

Наибольшее значение достигается при $s = \frac{l}{8}$:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{Mr_1 \lambda \operatorname{th} \lambda kL}{4k\pi hr_0^2}. \quad (78)$$

Для наибольших касательных напряжений в заделке согласно (46) имеем:

$$\tau_{zx} = \frac{M(r_0 + r_1)}{hl(r_0^2 + \frac{1}{2}r_1^2)}.$$

Этот результат отличается от результата, следующего из теории свободного кручения:

$$\tau_{zs} = \frac{M}{\Omega h} = \frac{M}{r_0 J h}$$

тем больше, чем значительнее отношение $r_1: r_0$; в предельном случае при $r_1 = r_0$ соотношение напряжений составляет $\frac{4}{8}$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о кручении консольного стержня коробчатого профиля моментом M_z , приложенным на торце $z = L$ (фиг. 57). Другой торец стержня будем считать закрепленным, так что при $z = 0$, $w(0, s) = 0$ и $\theta(0) = 0$.

Выберем начало координатных осей в центре прямоугольника. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq b & \quad \begin{aligned} x(s) &= a; \\ y(s) &= s; \\ x' &= 0 \\ y' &= 1 \end{aligned} \quad r(s) = a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \leq s \leq 2a + b & \quad \begin{aligned} x(s) &= a + b - s \\ y(s) &= b; \\ x' &= -1 \\ y' &= 0 \end{aligned} \quad r(s) = b, \end{aligned}$$

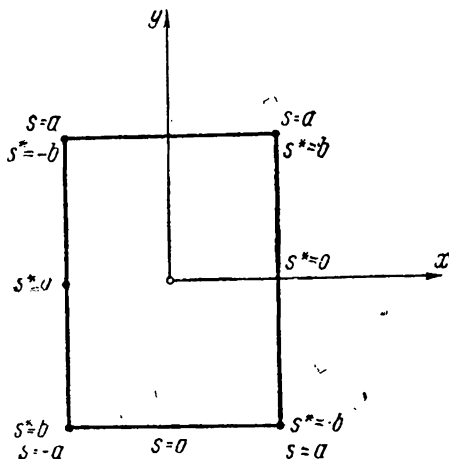
$$\begin{aligned} 2a + b \leq s \leq 2a + 3b & \quad \begin{aligned} x(s) &= -a; \\ y(s) &= 2(a + b) - s; \\ x' &= 0 \\ y' &= -1 \end{aligned} \quad r(s) = a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + 3b \leq s \leq 4a + 3b & \quad \begin{aligned} x(s) &= s - 3(a + b); \\ y(s) &= -b; \\ x' &= 1 \\ y' &= 0 \end{aligned} \quad r(s) = b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a + 3b \leq s \leq 4a + 4b & \quad \begin{aligned} x(s) &= a; \\ y(s) &= s - 4(a + b); \\ x' &= 0 \\ y' &= 1 \end{aligned} \quad r(s) = a. \end{aligned}$$

Дуга s отсчитывается вдоль всего контура от точки пересечения контура с осью x . На фиг. 57 показан и другой применяемый в дальнейшем способ отсчета дуг — для каждой стенки от своего начала.

При составлении характеристического уравнения нужно учесть, что при переходе через угол прямоугольника радиус $r(s)$ испытывает конечный скачок, равный по величине $b-a$.



Фиг. 57.

Поэтому в уравнении (69) интегрирование нужно понимать в смысле Стильтьеса. Тогда (69) принимает вид

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+k-2} (b-a)^2 \cos(s_k - s_i + 2a + 2b) + \\ + \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} (b-a) \times \\ \times \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (b-a) \sin(s_k - s_i) + \frac{\lambda}{h} = 0.$$

Вычисляя суммы, после ряда преобразований с помощью формул приведения к виду, удобному для логарифмирования, имеем

$$\lambda \frac{ab(a+b)}{(b-a)^2} \sin \lambda(a-b) - \sin \lambda a \cdot \sin \lambda b = 0. \quad (79)$$

Вводя обозначения

$$\beta = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+\alpha}; \quad \alpha = \frac{b}{a}; \quad \lambda_n = \frac{\pi}{a+b} \gamma_n; \quad \Gamma = \frac{(1-2\beta)^2}{\beta(1-\beta)},$$

перепишем (79) в виде

$$\pi \gamma_n \sin \pi \gamma_n - \frac{(1-2\beta)^2}{\beta(1-\beta)} \sin \pi \gamma_n \beta \cdot \sin \pi \gamma_n (1-\beta) = 0. \quad (80)$$

Таким образом, γ_n есть функция только β , а следовательно, только отношения сторон прямоугольника.

Уравнение (80) имеет асимптотическое решение

$$\gamma_n \sim n.$$

Первые корни приведены в табл. 12.

Собственные функции, отвечающие указанным корням, имеют вид

$$-a < s < a \quad W_n = D_n \frac{\sin \lambda_n s}{\sin \lambda_n a},$$

$$-b < s^* < b \quad W_n = -D_n \frac{\sin \lambda_n s^*}{\sin \lambda_n b},$$

$$s^* = s - (a + b).$$

В силу симметрии мы ограничились выражениями функции лишь на двух участках, отвечающих различным сторонам прямоугольника.

Таблица 12

β	0,1	0,2	0,3	0,4
Γ	7,111	2,256	0,762	0,167
γ_1	0,836	0,891	0,944	0,984
γ_2	1,778	1,886	1,965	1,997
γ_3	2,786	2,933	2,981	3,000
γ_4	3,818	3,981	3,993	4,000
γ_5	4,859	5,000	5,000	5,000
γ_6	5,901	5,986	6,000	6,000
γ_7	6,940	7,000	7,000	7,000
γ_8	8,000	8,000	8,000	8,000

Нормирующий множитель для $n = 1, 2 \dots n \dots$,

$$D_n^2 = \frac{1}{\frac{a}{\sin^2 \lambda_n a} + \frac{b}{\sin^2 \lambda_n b} - \frac{(b-a)^2}{ab(a+b)}}.$$

На основании формулы (73) получаем ($L = \infty$).

$$\left. \begin{aligned} w(z, s) &= \frac{Mb}{16\mu h(a-b)} \times \\ &\times \left[s - \frac{8(a-b)}{a+b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\lambda_n^2} \frac{\sin \lambda_n s}{\sin \lambda_n a} e^{-\lambda_n z} \right]; \\ &\quad -a \leq s \leq a, \\ w(z, s) &= -\frac{Ma}{16\mu h(a-b)} \times \\ &\times \left[s^* - \frac{8(a-b)}{a+b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\lambda_n^2} \frac{\sin \lambda_n s^*}{\sin \lambda_n b} e^{-\lambda_n z} \right]; \\ &\quad -b \leq s^* \leq b. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Производная $\dot{\vartheta}$ равна

$$\dot{\vartheta}(z) = \frac{M(a+b)}{16\mu h(a-b)} \left[1 - \frac{8(b-a)^2}{(a+b)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n L z} \right].$$

Первое собственное число развитой здесь общей теории составляет для

$$\alpha = 3 \quad \text{и} \quad \frac{L}{a} = 15$$

$$\lambda L = 10,8,$$

в то время как по прикладной теории (гл. III) получается

$$\lambda L = 7,0,$$

что свидетельствует о достаточной точности прикладной теории в отношении того члена решения, которому соответствует наиболее быстрое затухание.

Решение (81) может быть использовано для получения выражения нормального напряжения. По этой формуле могут

быть подсчитаны напряжения σ_z во всех точках стержня, кроме углов заделанного сечения, где ряды, определяющие σ_z , вообще говоря, расходятся. Л. И. Балабухом [2] было показано, что результаты, вычисленные Карманом, для напряжений в указанных углах сомнительны.

§ 7. Основы решения общей задачи

В настоящем параграфе будут вкратце намечены основные этапы решения общей задачи теории и приведены без подробного вывода некоторые результаты, полученные Р. А. Ададуриным.

Определим, прежде всего, собственные функции $S(s, \lambda_h)$ однородного уравнения, получаемого из (21) при $Q_x = Q_y = M_z = p_z = 0$; $h = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{k^2 h}{\Delta} \left[H_\xi(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} x' ds + \right. \\ \left. + H_\eta(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} y' ds + \right. \\ \left. + H_\theta(x', y', \omega') \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \omega' ds \right] = 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в форме:

$$\Phi(z, s) = g(z) S(s). \quad (83)$$

Подставляя (83) в (82), получаем соотношение, которое после введения постоянной разделения $-\lambda^2$ сводится к двум уравнениям:

$$\ddot{g} - \lambda^2 k^2 g = 0, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} S'' + \lambda^2 S - \frac{h}{\Delta} \left[H_\xi(x', y', \omega') \int_0^l S'' x' ds + \right. \\ \left. + H_\eta(x', y', \omega') \int_0^l S'' y' ds + \right. \\ \left. + H_\theta(x', y', \omega') \int_0^l S'' \omega' ds \right] = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (85) введением неизвестных постоянных R_x, R_y, R_ω (значений интегралов от производной S'') сводится к системе уравнений

$$S'' + \lambda^2 S = \frac{h}{\Delta} [H_\xi R_x + H_\eta R_y + H_\theta R_\omega], \quad (86)$$

$$R_x = \int_0^l S'' x' ds; \quad R_y = \int_0^l S'' y' ds; \quad R_\omega = \int_0^l S'' \omega'(s) ds. \quad (87)$$

Вспомнив, что выражения H_ξ, H_η, H_θ линейны относительно аргументов и являя величины

$$T_\xi = H_\xi(R_x, R_y, R_\omega); \quad T_\eta = H_\eta(R_x, R_y, R_\omega);$$

$$T_\theta = H_\theta(R_x, R_y, R_\omega),$$

связанные с R_x, R_y, R_ω соотношениями

$$\left. \begin{aligned} L_y T_\xi + L_{xy} T_\eta + K_y T_\theta &= \Delta \cdot R_x, \\ L_{xy} T_\xi + L_\omega T_\eta + K_\omega T_\theta &= \Delta \cdot R_y, \\ K_y T_\xi + K_\omega T_\eta + I_\theta T_\theta &= \Delta \cdot R_\omega, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

представим уравнение (86) в виде

$$S'' + \lambda^2 S = \frac{h}{\Delta} [T_\xi x' + T_\eta y' + T_\theta \omega']. \quad (89)$$

Здесь T_ξ, T_η, T_θ являются подлежащими определению из условий (87) и (88) постоянными (они фактически заменяют постоянные R_x, R_y, R_ω).

Общее решение уравнения (89) имеет вид

$$S = \frac{h}{\Delta} [T_\xi x^* + T_\eta y^* + T_\theta \omega^*],$$

где функции x^*, y^*, ω^* являются решениями уравнений

$$\frac{d^2 \omega_i^*}{ds^2} + \lambda^2 \omega_i^* = \omega_i;$$

$$\omega_1^* = x^*; \quad \omega_2^* = y^*; \quad \omega_3^* = \omega^*,$$

$$\omega_1 = x'; \quad \omega_2 = y'; \quad \omega_3 = \omega'.$$

при граничных условиях $\omega_i^*(0) = 0$ и $\omega_i^*(l) = 0$ (открытый профиль) или $\omega_i^*(s) = \omega_i^*(s+l)$ (закрытый профиль).

Решения этих уравнений имеют следующий вид:
для закрытого профиля

$$\omega_i^* = \frac{1}{2\lambda \sin \lambda \frac{l}{2}} \int_0^l \omega_i(t) \cos \lambda \left(s + \frac{l}{2} - t \right) dt + \\ + \frac{1}{\lambda} \int_0^s \omega_i(t) \sin \lambda (s - t) dt; \quad (90)$$

для открытого профиля

$$\omega_i^* = \frac{1}{\lambda} \left[\int_0^s \omega_i(t) \sin \lambda (s - t) dt - \right. \\ \left. - \frac{\sin \lambda s}{\sin \lambda l} \int_0^l \omega_i \sin \lambda (l - t) dt \right]. \quad (91)$$

Перепишем (88) с помощью (87) в форме

$$\left. \begin{aligned} L_y T_\xi + L_{xy} T_\eta + K_y T_\theta &= \Delta \int_0^l S'' x'(s) ds, \\ L_{xy} T_\xi + L_x T_\eta + K_x T_\theta &= \Delta \int_0^l S'' y'(s) ds, \\ K_y T_\xi + K_x T_\eta + I_p T_\theta &= \Delta \int_0^l S'' \omega'(s) ds. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Подставляя найденное нами выражение для S в уравнения (92), приходим к однородной системе уравнений для определения величин T_ξ , T_η , T_θ . Заменяя S'' в соотношениях (92) его значением из формулы (89), получаем для определения постоянных T_ξ , T_η , T_θ следующую систему уравнений:

$$\lambda^2 \int_0^l S(s) x' ds = 0, \quad \lambda^2 \int_0^l S(s) y' ds = 0, \quad \lambda^2 \int_0^l S(s) \omega' ds = 0,$$

или в развернутой форме

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 \int_0^l Sx'ds &= \frac{\lambda^2 h}{\Delta} \left[T_\xi \int_0^l x^* x' ds + T_\eta \int_0^l y^* x' ds + \right. \\ &\quad \left. + T_\theta \int_0^l \omega^* x' ds \right] = 0, \\ \lambda^2 \int_0^l Sy'ds &= \frac{\lambda^2 h}{\Delta} \left[T_\xi \int_0^l x^* y' ds + T_\eta \int_0^l y^* y' ds + \right. \\ &\quad \left. + T_\theta \int_0^l \omega^* y' ds \right] = 0, \\ \lambda^2 \int_0^l S\omega'ds &= \frac{\lambda^2 h}{\Delta} \left[T_\xi \int_0^l x^* \omega' ds + T_\eta \int_0^l y^* \omega' ds + \right. \\ &\quad \left. + T_\theta \int_0^l \omega^* \omega' ds \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Входящие в правую часть интегралы обладают своеобразной симметрией, выражающейся формулой

$$\int_0^l \omega_j^* \omega'_k ds = \int_0^l \omega'_j \omega_k^* ds,$$

которая может быть легко доказана интегрированием при использовании формулы Дирихле.

Вводя обозначения

$$L_x^*(\lambda) = \int_0^l y^* y' ds; \quad L_y^*(\lambda) = \int_0^l x^* x' ds; \quad L_{xy}^*(\lambda) = \int_0^l x^* y' ds,$$

$$K_x^*(\lambda) = \int_0^l \omega^* y' ds; \quad K_y^*(\lambda) = \int_0^l \omega^* x' ds,$$

$$I_\omega^*(\lambda) = \int_0^l \omega^* \omega' ds,$$

запишем систему (93) в форме

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 \frac{h}{\Delta} [L_y^* T_\xi + L_{xy}^* T_\eta + K_y^* T_\theta] &= 0, \\ \lambda^2 \frac{h}{\Delta} [L_{xy}^* T_\xi + L_x^* T_\eta + K_x^* T_\theta] &= 0, \\ \lambda^2 \frac{h}{\Delta} [K_y^* T_\xi + K_x^* T_\eta + I_p^* T_\theta] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Легко видеть, что системе (94) отвечают три группы собственных функций. Первую образуют функции, соответствующие очевидному корню $\lambda = 0$; на основании (89) они являются решениями уравнения

$$S'' = \frac{h}{\Delta} [T_\xi x' + T_\eta y' + T_\theta \omega'].$$

Эти функции по существу представляют решение задачи Сен-Венана. Ко второй группе относятся функции, отвечающие $T_\xi = T_\eta = T_\theta = 0$ и являющиеся корнями уравнения

$$S'' + \lambda^2 S = 0.$$

Они даются формулой

$$S(s) = A \sin \lambda s + B \cos \lambda s.$$

Наконец, третью (основную) группу собственных функций образуют те, которые соответствуют характеристическим числам, получаемым из уравнения

$$\Delta^*(\lambda) = \begin{vmatrix} L_y^* & L_{xy}^* & K_y^* \\ L_{xy}^* & L_x^* & K_x^* \\ K_y^* & K_x^* & I_p^* \end{vmatrix} = 0, \quad (95)$$

выражающего равенство нулю определителя однородной системы (94).

Развертывая определитель, получаем

$$\Delta^*(\lambda) = I_p^* (L_x^* L_y^* - L_{xy}^{*2}) - (L_x^* K_y^{*2} - 2L_{xy}^* K_x^* K_y^* + L_y^* K_x^{*2}) = 0.$$

Тогда постоянные T определяются через произвольную величину D формулами

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= D_{\xi} (I_{\rho}^* L_{\rho}^* - K_{\rho}^{*2}) = - D_{\eta} (I_{\rho}^* L_{xy}^* - K_{xy}^* K_y^*) = \\ &= - D_{\eta} (L_{xy}^* K_y^* - L_{xy}^* K_x^*), \\ T_{\eta} &= - D_{\xi} (I_{\rho}^* L_{xy}^* - K_{xy}^* K_y^*) = D_{\eta} (I_{\rho}^* L_y^* - K_y^{*2}) = \\ &= D_{\eta} (L_y^* K_x^* - L_{xy}^* K_y^*), \\ T_{\theta} &= - D_{\xi} (L_{xy}^* K_y^* - L_{xy}^* K_x^*) = - D_{\eta} (L_y^* K_x^* - L_{xy}^* K_y^*) = \\ &= D_{\theta} (L_x^* L_y^* - L_{xy}^{*2}), \end{aligned}$$

а соответствующие им собственные функции вычисляются по формулам (90) или (91).

Для сечений, имеющих две оси симметрии, уравнение (95) упрощается и принимает вид:

$$L_x^* L_y^* I_{\rho}^* = 0,$$

т. е. распадается на три самостоятельных уравнения.

Оставшиеся в выражениях собственных функций произвольные постоянные определяются из условия нормирования

$$\int_0^l S'^2(s, \lambda) ds = \lambda^2 \int_0^l S^2(s, \lambda) ds = 1.$$

Нетрудно доказать ортогональность построенной таким образом системы функций $S(s, \lambda)$ и их производных

$$\int_0^l S(s, \lambda_k) S(s, \lambda_l) ds = 0 \quad (k \neq l),$$

$$\int_0^l S'(s, \lambda_k) S'(s, \lambda_l) ds = 0 \quad (k \neq l).$$

Действительно, умножая (89) на $S(s, \lambda_i)$ и интегрируя по s , в силу (93) имеем *

$$\int_0^l S''(s, \lambda_k) S(s, \lambda_i) ds + \lambda_k^2 \int_0^s S(s, \lambda_k) S(s, \lambda_i) ds = 0$$

и аналогично

$$\int_0^l S''(s, \lambda_i) S(s, \lambda_k) ds + \lambda_i^2 \int_0^s S(s, \lambda_i) S(s, \lambda_k) ds = 0.$$

Интегрируя первые члены этих формул по частям, имеем

$$\lambda_k^2 \int_0^l S(s, \lambda_k) S(s, \lambda_i) ds = \int_0^l S'(s, \lambda_k) S'(s, \lambda_i) ds,$$

$$\lambda_i^2 \int_0^l S(s, \lambda_i) S(s, \lambda_k) ds = \int_0^l S'(s, \lambda_i) S'(s, \lambda_k) ds.$$

Вычитая, получим

$$(\lambda_k^2 - \lambda_i^2) \int_0^l S(s, \lambda_k) S(s, \lambda_i) ds = 0;$$

откуда при $\lambda_i \neq \lambda_k$ следует ортогональность функций $S(s, \lambda_i)$; тогда предыдущие формулы доказывают ортогональность производных $S'(s, \lambda_i)$.

Не останавливаясь далее на деталях выкладок Р. А. Адагурова, укажем только, что общее решение неоднородного уравнения строится в форме ряда по всем собственным функциям.

Заметим, что путем ряда преобразований можно получить уравнение, определяющее величины, аналогичные бимоментам приближенной теории гл. II. Эти величины естественно называть *полимоментами*.

* Так как (93) тождественно удовлетворено при $\lambda = 0$, то следующее не относится к собственным функциям, отвечающим этому корню.

Уравнение для определения полимоментов $M(z, \lambda_n)$ имеет вид

$$\ddot{M}(z, \lambda_n) - k^2 \lambda_n^2 M(z, \lambda_n) = \frac{h}{\Delta} \left[T_{\xi}(\lambda_n) \dot{Q}_{\omega}(z) + \right. \\ \left. + T_{\eta}(\lambda_n) \dot{Q}_{\eta}(z) - T_0(\lambda_n) \dot{M}_z(z) \right] - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} p_z(z, s) S'(s, \lambda_n) ds.$$

Не приводя окончательных формул для напряжений, укажем, что в общей теории напряжения представляют собой результат наложения на элементарное решение бесконечного ряда дополнительных напряжений, соответствующих полимоментам.

Напомним, что такую же структуру имело и решение, полученное в прикладной теории равновесия тонкостенных стержней; в нем вместо бесконечного ряда имелся один член, отвечавший единственному в этой теории полимоменту (бимоменту).

Отметим еще, что наличие в уточненной теории полимоментов позволяет рассматривать задачи о нагружении тонкостенных стержней такими внешними нагрузками, которые статически эквивалентны нулю с точностью до полимоментов любого порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Первая задача, относящаяся к проблеме стесненного кручения тонкостенного стержня, была поставлена и решена в России в 1905 г. С. П. Тимошенко [14]. В его работе рассмотрено кручение двутавровой балки, одно из сечений которой остается плоским. В основе решения, посвященного этой частной задаче, можно усмотреть зачатки тех гипотез, которые спустя тридцать лет позволили построить современную прикладную теорию, относящуюся к произвольным условиям нагружения и закрепления для стержня любого профиля.

Это несложное решение задачи о стесненном кручении двутавра сводится к следующему.

Полагая, что каждая из полок двутавра не только закручивается как часть общей системы, но и изгибается (это было пояснено выше на фиг. 25), можно записать следующие две составляющие общего крутящего момента:

момент свободного кручения

$$M_1 = C \vartheta \quad (1)$$

и момент, образованный неизвестными силами Q , изгибающими полки,

$$M_2 = QH. \quad (2)$$

Если пренебречь деформацией сдвига при изгибе полки, то для прогиба полки η становится справедливым следующий результат элементарной теории

$$\ddot{\eta} = -\frac{Q}{EI}, \quad (3)$$

где $I = \frac{hB^3}{12}$ — момент инерции полки относительно оси x .

Принимая гипотезу неизменяемости контура, имеем

$$\vartheta = \frac{2\eta}{H}. \quad (4)$$

При учете соотношений (3) и (4) выражение (1) принимает вид:

$$M_2 = -\frac{1}{2} E I H^2 \ddot{\theta}. \quad (5)$$

Складывая (1) и (5), приходим к основному дифференциальному уравнению задачи:

$$\frac{1}{2} E I H^2 \ddot{\theta} - C \dot{\theta} = -M, \quad (6)$$

которое можно рассматривать как частный случай уравнения (21) гл. II.

В ряде зарубежных работ, опубликованных в 1921—1926 гг., рассмотрена проблема стесненного кручения тонкостенных стержней двухполочного открытого профиля (швеллер, зетовое сечение, разнополочный двутавр). По существу, в этих работах содержится лишь развитие идеи, которая была положена в основу уравнения (6).

Стесненное кручение стержня с произвольной формой открытого профиля было рассмотрено Вагнером в 1929 г. [24]. Вагнер исходил из тех гипотез, которые были приняты при выводе уравнения (6) для двутавра; ими являлись гипотеза неизменяемости контура поперечного сечения и гипотеза отсутствия сдвигов срединной поверхности. При развитии теории устойчивости тонкостенного стержня Вагнер получил неверные результаты, ошибочно предположив совпадение центра вращения при потере устойчивости с центром изгиба. Эта ошибка была обнаружена В. З. Власовым.

Современная прикладная теория деформации упругих тонкостенных стержней с открытым профилем была построена В. З. Власовым в 1936 г. независимо от Вагнера; ее основное содержание изложено выше в гл. II. Ряд простых и сильных результатов, полученных В. З. Власовым в его работах, сделали теорию В. З. Власова эффективным средством решения многих практических задач.

Значение работ В. З. Власова далеко выходит за рамки теории равновесия тонкостенных стержней; им решены вопросы колебаний и построена теория устойчивости тонкостенного

стержня с открытым профилем, свободная от отмеченной выше ошибки Вагнера.

В связи с работами В. З. Власова возникла значительная литература (Д. В. Бычков, А. К. Мрощинский, А. Р. Ржаницин, Б. Н. Горбунов) [4], [8], [15].

Значительный интерес представляет исследование А. А. Уманского [18], посвященное статически определенным схемам, типа рассмотренных в § 2 гл. IV, которые позволили без существенных осложнений перейти к проблеме тонкостенного стержня с открытым профилем и криволинейной осью.

2. Проблема стесненного кручения тонкостенного стержня с закрытым профилем несколько задержалась в своем развитии. Только в 1926 г. Рейсснер рассмотрел стесненное кручение прямоугольного коробчатого стержня; в течение многих лет, — вплоть до опубликования работы А. А. Уманского в 1939 г., — этот частный случай являлся, в сущности, единственным объектом исследований в рассматриваемой области.

Рейсснер исходил из линейного распределения нормальных напряжений по сечению каждой из плоских стенок и рассмотрел тот частный случай нагрузки, когда производная угла закручивания изменяется по длине стержня линейно, т. е.

$$\vartheta = A_1 + A_2 z + A_3 z^2.$$

Большое методологическое и практическое значение имела опубликованная в 1932 г. работа В. Н. Беляева [3], посвященная также стесненному кручению прямоугольного кессона.

Исходя из схемы, в которой нормальные напряжения воспринимаются поясами, а касательные напряжения — только обшивкой, В. Н. Беляев впервые получил уравнение трех осевых сил (см. выше § 3 гл. IV).

В. Н. Беляевым впервые была получена формула для касательных напряжений в плоском сечении тонкостенного стержня произвольного сечения:

$$\tau_{qs} = \frac{M}{I} r.$$

Хотя автор основывался на полуинтуитивных соображениях о близости условий в заделке к условиям задачи Шухова, однако полученный им результат вполне строг. Впоследствии Р. А. Ададунов [1] обобщил этот результат на случай, когда, кроме крутящего момента, имеются еще и поперечные силы.

Позднее за рубежом уравнение трех осевых сил для кессона было вновь получено Эбнером. Эбнер предполагал, что стенки работают на нормальные напряжения по схеме, принятой Рейсснером (линейный закон по сечению каждой из стенок).

В работе Вильямса (1936 г.) было получено дифференциальное уравнение стесненного кручения стержня коробчатого профиля. Принятое Рейсснером, Эбнером и Вильямсом линейное распределение нормальных напряжений по сечению каждой из стенок представляет собой своеобразное ослабление и модификацию гипотезы Навье о линейном законе распределения нормальных напряжений, с отнесением ее не ко всему поперечному сечению, а к каждой стенке.

Если для первого этапа развития теории были типичны поиски решения, относящегося к частному виду поперечного сечения, то второй этап характеризуется изысканиями общих методов, не связанных с конкретными типами профилей.

Создание прикладной теории тонкостенных стержней с закрытым профилем произвольной формы обязано, в основном, трудам А. А. Уманского. Его теория была изложена выше в главе III и впервые была опубликована в 1939 г. [16].

В 1944 г. Карман и Кристенсен [22] предложили тот способ решения, который пятью годами ранее был выдвинут и разработан А. А. Уманским.

3. Независимо от формирования удобных в практическом отношении прикладных теорий, вопрос об их точности оставался открытым. Это потребовало создания такой теории деформации тонкостенных стержней, которая основывалась бы на меньшем количестве гипотез.

Подобная теория была успешно создана в 1943—1948 гг. Р. А. Ададуновым, исходящим из гипотез о постоянстве напряжений σ_x и τ_{xz} по толщине профиля и о неизменяемости контура. Им не только были даны основные

уравнения теории, но и разработан оригинальный метод решения этих уравнений. На исследовании Р. А. Ададурова было основано содержание главы V настоящей книги.

В 1946 г. Карман и Вей-Цанг-Чен опубликовали работу [28], в которой рассмотрели в духе уточненной теории задачи, частично изложенные нами выше в § 6 гл. V. Результаты указанных авторов являются частным случаем общего решения, данного Р. А. Ададуровым еще в 1943 г.

ЛИТЕРАТУРА *

1. Аладуров Р. А. — Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки. Труды ЦАГИ, № 614, 1947.
- 1а. Аладуров Р. А. — Напряжения и деформации в цилиндрической оболочке с жесткими поперечными сечениями. ДАН, 62, № 2 (1948).
2. Биллоух Л. И. — Расчет на прочность конических кессонов. Труды ЦАГИ, № 640, 1947.
3. Белиев В. И. — Расчет свободно несущих крыльев. Техника воздушного флота, №№ 7,8—9, 1932.
4. Бычков Д. В. и Мрошинский А. К. — Кручение металлических балок. Москва, Госстройиздат, 1945.
5. Власов В. З. — Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения. Вестник ВИА РККА, № 20, 1936; Проект и стандарт, № 8—9, 10, 1936; Строительная промышленность, №№ 6 и 7, 1938; Прикладная математика и меха т. III, вып. 1, 1939.
6. Власов В. З. — Тонкостенные упругие стержни. Москва Госстройиздат, 1940.
7. Гильман Л. С. и Голушкевич С. С. — Кручение призматических стержней парами, распределенными по их длине. Труды Высшего инженерного училища ВМФ, вып. 4, стр. 81—93.
8. Горбунов Б. И. — Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней. Прикладная математика и механика, т. VII, вып. 1, стр. 65—70, 1943.
9. Жансидзе Г. Ю. — Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В. З. Власова. Прикладная математика и механика, т. VII, вып. 6, стр. 455—462, 1943.
10. Киселев В. Ф. — Расчет на прочность многослойной цилиндрической оболочки с жесткими деформациями. Труды ЦАГИ, № 619, 1947.
11. „Машиностроение“. Энциклопедический справочник, т. 1, кн. 2, стр. 298—350. Москва, 1947.

* В список включены лишь работы в той или иной степени использованные авторами.

12. Новодворский В. Э. — К вопросу о безмоментной теории оболочек. Строительная промышленность, № 1, 1933.
13. Пановко Я. Г. — Развитие прикладной теории тонкостенных стержней за последние годы. Труды ЛКВВИА, вып. 11, 1947.
14. Тимошенко С. П. — Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки. Известия СПб Политехнического института, т. IV—V, 1905—1906.
15. Труды Лаборатории строительной механики Центрального научно-исследовательского института промышленных сооружений. Москва, Госстройиздат, 1941.
16. Уманский А. А. — Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций. Москва, Оборонгиз, 1939.
17. Уматский А. А. — О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета. Техника воздушного флота, № 12, 1940.
18. Уманский А. А. — Расчет тонкостенных криволинейных балок. Труды Научно-технической конференции ВВА им. Жуковского, вып. 2, 1944.
19. Фепплъ А. и Фепплъ Л. — Сила и деформация, т. 2. Москва, ОНТИ, 1936.
20. Ebner H. — Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorsch., Bd. 24, №№ 23—24, 1933.
21. Hadji-Argjris J. and Dunne P. C. — The general theory of cylindrical and conical tubes under torsion and bending loads. The Journal of the Royal aeronautical Society. Vol. 51, №№ 434, 441, 443, 1947.
22. Karman Th. and Christensen N. B. — Methods of analysis for torsion with variable twist. Journal of the aeronautical sciences. Vol. 11, № 2, p. 110—124, 1944.
23. Karman Th. and Wei-Zang-Chien. — Torsion with variable twist. Journal of the aeronautical sciences. Vol. 15, № 10, p. 503—511, 1946.
24. Wagner H. — Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25-Jahre Technische Hochschule. 1929.